Corrigé du devoir maison: Suites et limites

Terminale générale
Spécialité maths

Exercice 1

1. $u_2 = \left(1+\frac{2}{1}\right)u_1 + \frac{18}{1} - 4 = 3\times(-5)+14 = -1$ $u_3 = \left(1+\frac{2}{2}\right)u_2 + \frac{18}{2} - 4 = 2\times(-1)+5 = 3$
   On peut conjecturer que la suite (u_n) est arithmétique de raison 4.
2. Ce programme calcule et affiche les premières valeurs de la suite : $u(2) = -1$, $u(3) = 3$, $u(4) = 7$ et $u(5) = 11$.
3. On note, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\mathcal{P}_n : u_n = 4n - 9$.
   Initialisation : On a $u_1 = -5$, et pour $n = 1$, $4\times 1 - 9 = -5$.
   Ainsi, initialement au rang $n = 1$, $\mathcal{P}_1$ est vraie.

   Hérédité : Supposons que pour un certain entier $n \geqslant 1$, $\mathcal{P}_n$ est vraie, c'est-à-dire que $u_n = 4n-9$, alors,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \left(1+\frac{2}{n}\right)u_n + \frac{18}{n} - 4 \\ &= \left(1+\frac{2}{n}\right)(4n-9) + \frac{18}{n} - 4 \\ &= 4n - 9 + \frac{8n}{n} - \frac{18}{n} + \frac{18}{n} - 4 \\ &= 4n - 5 \\ &= 4(n+1) - 9 \end{aligned}$$

   Ainsi au rang suivant, $\mathcal{P}_{n+1}$ est encore vraie.

   Conclusion : On a donc montré, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = 4n - 9$.

Exercice 2

1. Programme Python :

```
u=-5
for n in range(1,5) :
    u=2/3*u+1
    print(u)
```

2. On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 3$.
   a) Pour tout entier n, on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3 \\ &= \frac{2}{3}u_n + 1 - 3 = \frac{2}{3}u_n - 2 \\ &= \frac{2}{3}(u_n - 3) = \frac{2}{3}v_n \end{aligned}$$

   ce qui montre que la suite est géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 3 = -\frac{5}{2}$.

   b) On a alors, pour tout entier n,

$$v_n = v_0 q^n = -\frac{5}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

   et alors

$$u_n = v_n + 3 = -\frac{5}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3$$

Exercice 3 *Centres étrangers, juin 2010.* f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{6x+1}{x+1}$.

1. **Etude de propriétés de la fonction** f

x	0 $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$\nearrow$

   a. Pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) = \dfrac{5}{(x+1)^2} > 0$.

   b. $f(x) = x \iff \dfrac{6x+1}{x+1} = x \iff 6x + 1 = x(x+1)$, en multipliant par $x + 1 \neq 0$ (car $x \geqslant 0$) et donc, $f(x) = x \iff x^2 - 5x - 1 = 0$.
   Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 29 > 0$, et admet donc deux solutions réelles distinctes : $x_1 = \dfrac{5-\sqrt{29}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{5+\sqrt{29}}{2}$.

   Comme $x_1 < 0$, l'équation $f(x) = x$ admet donc sur $[0; +\infty[$ une seule solution $\alpha = \dfrac{5+\sqrt{29}}{2}$.

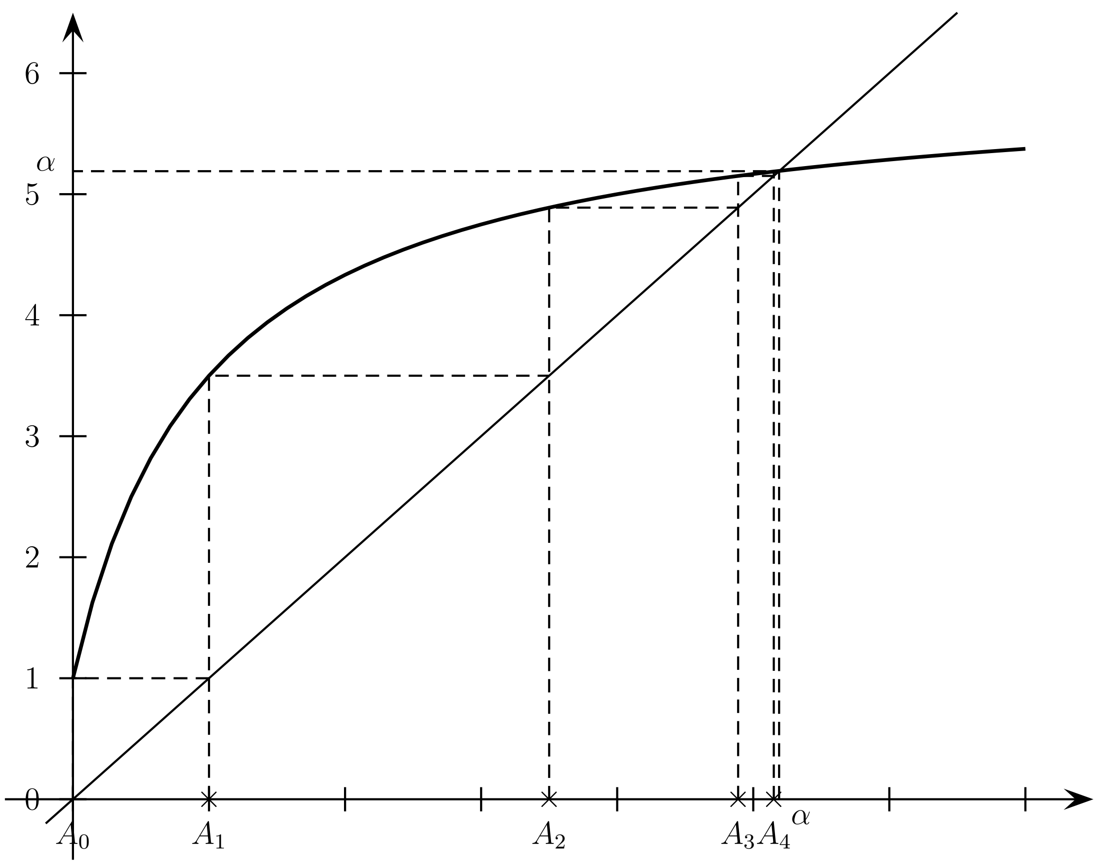
   c. Comme f est strictement croissante sur $[0; \alpha]$, on a $0 \leqslant x \leqslant \alpha \Longrightarrow f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(\alpha)$.
   Or, $f(0) = 1$ et $f(\alpha) = \alpha$. Ainsi, $0 \leqslant x \leqslant \alpha \Longrightarrow 0 \leqslant 1 \leqslant f(x) \leqslant \alpha$.
   Ainsi, si $x \in [0; \alpha]$, alors $f(x) \in [0; \alpha]$.

2. **Etude de la suite** (u_n) **pour** $u_0 = 0$

   a. Programme Python :

```
u=0
for n in range(1,101) :
    u=(6*u+1)/(u+1)
    print(u)
```

   b.



   On peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante, et qu'elle converge vers α.

c. Initialisation : Pour $n=0$, on a $u_0=0$, et $u_1=f(u_0)=f(0)=1$, et ainsi on a donc bien $u_0 \leqslant u_1$.
Hérédité : Supposons que pour un entier n on ait $u_n \leqslant u_{n+1}$.
Alors, comme la fonction f est croissante sur $[0;\alpha]$, $f\left(u_n\right) \leqslant f\left(u_{n+1}\right)$.
Or $f\left(u_n\right)=u_{n+1}$ et $f\left(u_{n+1}\right)=u_{n+2}$.
On a donc ainsi, $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant$, ce qui montre que la propriété est encore vraie au rang $n+1$.
Conclusion : On vient donc de démontrer, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.

On déduit en particulier de la propriété précédente que la suite (u_n) est croissante.