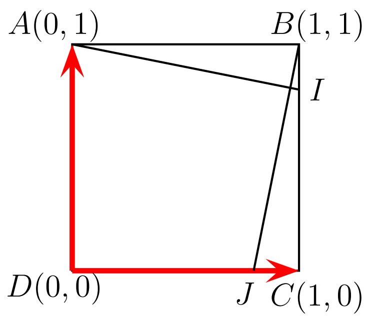
Correction du devoir maison de mathématiques

Géométrie plane vectorielle et analytique

Exercice 1 $ABCD$ est un carré, et $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CD}$.
On calcule les coordonnées de I et J.
Soit $I\,(x_I; y_I)$, alors

$$\overrightarrow{BI} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC} \iff \left\{\begin{array}{l} x_I - 1 = \frac{1}{5}(1-1) = 0 \\ y_I - 1 = \frac{1}{5}(0-1) = -\frac{1}{5} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x_I = 1 \\ y_I = \frac{4}{5} \end{array}\right.$$



De même, soit $J\,(x_J; y_J)$, alors

$$\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CD} \iff \left\{\begin{array}{l} x_J - 1 = \frac{1}{5}(0-1) = -\frac{1}{5} \\ y_J - 0 = \frac{1}{5}(0-0) = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x_J = \frac{4}{5} \\ y_J = 0 \end{array}\right.$$

On a alors $\overrightarrow{AI}(1; -\frac{1}{5})$ et $\overrightarrow{BJ}(-\frac{1}{5}; -1)$ et on peut calculer le produit scalaire

$$\overrightarrow{AI}. \cdot \overrightarrow{BJ} = 1 \times \left(-\frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{1}{5}\right) \times (-1) = 0$$

ce qui montre que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont orthogonaux.

Exercice 2 On utilise deux expressions du produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$:

a) $\overrightarrow{BA}(2; -1)$ et $\overrightarrow{BC}(-2; -2)$, d'où $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 2 \times (-2) + (-1) \times (-2) = -2$.

b) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos\widehat{ABC}$
avec $BA = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$ et $BC = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$,
et donc $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \sqrt{5} \times 2\sqrt{2} \times \cos\widehat{ABC}$.

En égalant ces deux expressions, on obtient

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -2 = \sqrt{5} \times 2\sqrt{2} \times \cos\widehat{ABC}$$

d'où on déduit que

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{-2}{2\sqrt{2}\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{5}}$$

et on peut alors calculer une valeur approchée de l'angle $\widehat{ABC}$ avec une calculatrice ($\cos^{-1}$ ou *acos*) :

$$\widehat{ABC} \simeq 108,4°$$

Exercice 3 ABC est un triangle tel que $A(3; -2)$, $B(0; -1)$ et $C(1; 3)$.

a) La médiatrice du segment $[AB]$ est la droite d perpendiculaire à (AB) et passant par le milieu de $[AB]$.
Ce milieu est $I\left(\frac{3+0}{2}; \frac{-2+(-1)}{2}\right)$ soit $I\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$

Soit $M(x; y)$ un point quelconque de la méediatrice d, alors on a, avec $\overrightarrow{AB}(-3; 1)$,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \quad &\iff \left(x - \frac{3}{2}\right) \times (-3) + \left(y + \frac{3}{2}\right) \times 1 = 0 \\ &\iff -3x + y + 6 = 0 \end{aligned}$$

qui est l'équation cartésienne de la médiatrice d (son équation réduite est alors $-3x+y+6=0 \iff y=3x-6$).

b) La hauteur d' issue de C dans le triangle ABC est la droite qui passe par C et perpendiculaire à $[AB]$.

Soit $M(x;y)$ un point quelconque de d', alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB}=0 &\iff (x-1)\times(-3)+(y-3)\times 1=0\\ &\iff -3x+y=0\end{aligned}$$

qui est l'équation cartésienne de la hauteur d' (son équation réduite est alors $y=3x$).

Exercice 4 Dans un RON, on considère les points $A(-3;0)$, $B(3;-1)$ et $C(1;5)$.

a) De même que dans l'exercice précédent, avec $\overrightarrow{AB}(6;-1)$, un point $M(x;y)$ appartient à la droite d_1 perpendiculaire à (AB) et passant par C si et seulement si

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AB}=0 &\iff (x-1)\times 6+(y-5)\times(-1)=0\\ &\iff 6x-y-1=0\end{aligned}$$

b) Un point $M(x;y)$ appartient à la droite d_2 parallèle à (AB) et passant par C si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si (le déterminant des vecteurs est nul : $xy'-x'y=0$)

$$(x-1)\times(-1)-(y-5)\times 6=0 \iff -x-6y+31=0$$

Exercice 5

1. Soit C le milieu de $[AB]$, alors C a pour coordonnées $C\left(\dfrac{2+1}{2};\dfrac{-1+3}{2}\right)$, soit $C\left(\dfrac{3}{2};1\right)$.

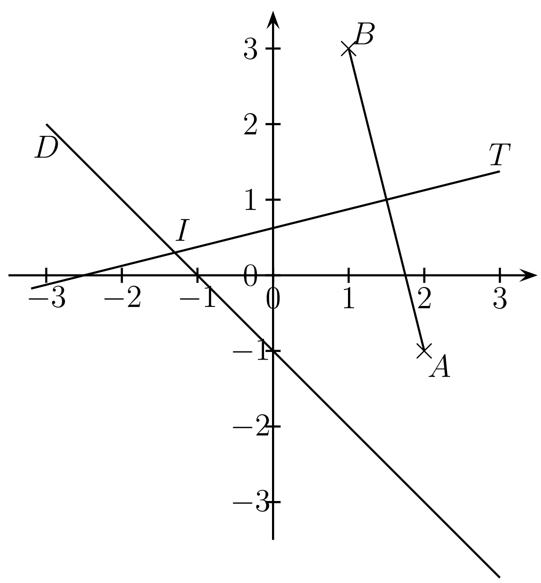
   De plus, $M(x;y)\in T \iff \overrightarrow{CM}\perp\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

   On a les coordonnées des vecteurs : $\overrightarrow{CM}\left(x-\dfrac{3}{2};y-1\right)$ et $\overrightarrow{AB}(-1;4)$, d'où,

$$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \iff \left(x-\frac{3}{2}\right)\times(-1)+(y-1)\times(4)=0 \iff -x+4y-\frac{5}{2}=0$$

   La médiatrice T a donc pour équation : $-x+4y-\dfrac{5}{2}=0$.

2.



3. Soit $I(x;y)$, alors,

$$I \in D \cup T \iff \left\{\begin{array}{l} x+y+1=0 \\ -x+4y-\dfrac{5}{2}=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x+y=-1 \\ -x+4y=\dfrac{5}{2} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=-\dfrac{13}{10} \\ y=\dfrac{3}{10} \end{array}\right.$$

Ainsi, les coordonnées de I sont $I\left(-\dfrac{13}{10};\dfrac{3}{10}\right)$.

4. $\overrightarrow{AB}(-1;4)$ est un vecteur directeur de la droite (AB). Une représentation paramétrique de (AB) est donc

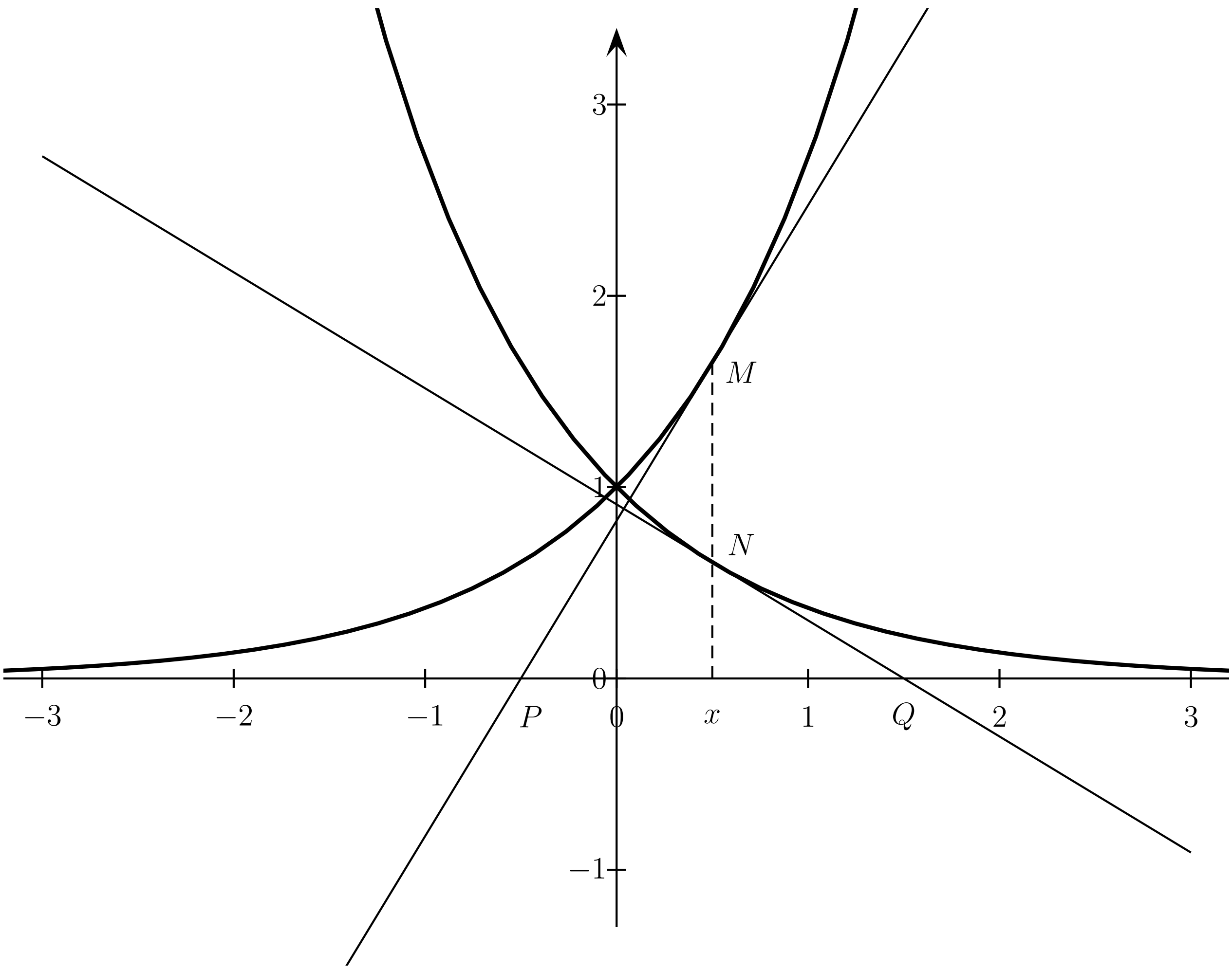
$$\left\{\begin{array}{l} x=2-t \\ y=-1+4t \end{array}\right. , t \in \mathbb{R}$$

Analyse

Exercice 6 On étudie la différence : $\varphi(x) = x^3 - \Big(-5x+18\Big) = x^3+5x-18$
C'est une fonction polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $\varphi'(x) = 3x^2+5$.
Pour tout réel x, on a $x^2 \geqslant 0$ et donc $\varphi'(x) = 3x^2+5 \geqslant 5 > 0$.
On en déduit que la fonction φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus, comme $\varphi(2)=0$, on en déduit que, pour tout $x \geqslant 2$, on a $\varphi(x) \geqslant \varphi(2) = 0$,
c'est-à-dire que $\varphi(x) = x^3 - \Big(-5x+18\Big) \geqslant 0 \iff x^3 \geqslant -5x+18$.

Exercice 7 *D'après Bac Antilles Guyane 2017*

a)



b) La tangente en M à $\mathcal{C}_f$ a pour équation

$$\begin{aligned} y &= f'(a)(x-a)+f(a) = e^a(x-a)+e^a \\ &= e^a x + e^a(1-a) \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de cette droite est $e^a x - y + e^a(1-a) = 0$, et donc $\vec{u}\,(e^a; -1)$ est un vecteur normal à cette droite.

De même, la tangente en N à $\mathcal{C}_g$ a pour équation

$$\begin{aligned} y &= g'(a)(x-a)+g(a) = -e^{-a}(x-a)+e^{-a} \\ &= -e^{-a} x + e^{-a}(1+a) \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de cette droite est $e^{-a}x + y - e^{-a}(1+a) = 0$ et donc $\vec{v}\,(e^{-a}; 1)$ est un vecteur normal à cette droite.

On a $\vec{u}\cdot\vec{v} = e^a e^{-a} - 1 = 1 - 1 = 0$, ce qui montre que ces vecteurs sont orthogonaux, comme ces deux tangentes, qui sont donc perpendiculaires.

c) On détermine les abscisses des points P et Q, qui sont à l'intersection des deux tangentes et de l'axe des abscisses.
On a donc, pour le point Q, $y = 0 = -e^{-a}x + e^{-a}(1+a) \iff x = 1+a$.
De même, pour le point P, $y = 0 = e^a x + e^a(1-a) \iff x = -1+a$.
On en déduit donc que $PQ = 1+a-(-1+a) = 2$ et ne dépend donc pas de l'abscisse a des points M et N.