Correction du devoir maison de mathématiques

Exercice 1 $F(x)=\dfrac{5}{3}x^3+\dfrac{1}{x}$; $G(x)=3\ln(x)$; $H(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+3\right)$

Exercice 2

1. On a $f=10\times\dfrac{1}{u}$ avec $u(x)=9e^{-10x}+1$ soit $u=9e^v+1$, donc $u'=9v'e^v$, donc encore $u'(x)=-90e^{-10x}$, et donc $f'=-10\times\dfrac{u'}{u^2}$, soit
$$f'(x)=-10\frac{-90e^{-10x}}{\left(9e^{-10x}+1\right)^2}=\frac{900e^{-10x}}{\left(9e^{-10x}+1\right)^2}$$
D'utre part, on a
$$\begin{aligned} f(x)\left(10-f(x)\right) &= \frac{10}{9e^{-10x}+1}\left(10-\frac{10}{9e^{-10x}+1}\right)\\ &= \frac{10}{9e^{-10x}+1}\left(\frac{9e^{-10x}}{9e^{-10x}+1}\right)\\ &= \frac{900e^{-10x}}{\left(9e^{-10x}+1\right)^2}\end{aligned}$$
On trouve donc bien que $f'=f(10-f)$, c'est-à-dire que f est solution de l'équation différentielle (E).
De plus, f vérifie aussi la condition initiale $f(0)=\dfrac{10}{9\times1+1}=1$.

2. On a $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-10x}=0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=10$.
On en déduit que la droite d'équation $y=10$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.

3. À la première question, on a vu que
$$f'(x)=\frac{900e^{-10x}}{\left(9e^{-10x}+1\right)^2}$$
et, comme $e^x>0$ pour tout réel x, on trouve que $f'(x)>0$, et donc que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

4. La convexité de f est donnée par le signe de sa dérivée seconde.
On peut soit calculer celle-ci à partir du résultat de la première question, soit utiliser le fait que f est solution de l'équation (E).
En effet, on sait que f solution de (E), c'est-à-dire que $f'=f(10-f)$. En dérivant cette relation, on obtient (en dérivant le produit)
$$f''=f'(10-f)+f(-f')=f'(10-f-f)=f'(10-2f)$$
On a vu que $f'>0$, et le signe de f'' est donc donné par celui de $10-2f$:
$$\begin{aligned} 10-2f(x)>0 &\iff f(x)<5\\ &\iff \frac{10}{9e^{-10x}+1}<5\\ &\iff \frac{9e^{-10x}+1}{10}>\frac{1}{5}\\ &\iff 9e^{-10x}+1>\frac{10}{5}=2\\ &\iff e^{-10x}>\frac{1}{9}\\ &\iff -10x>\ln(1/9)=-\ln(9)\\ &\iff x<\frac{\ln(9)}{10}\end{aligned}$$

On en déduit que f est convexe sur $\left[0;\frac{\ln(9)}{10}\right]$, et est concave sur $\left[\frac{\ln(9)}{10};+\infty\right[$

En particulier, le point d'abscisse $\dfrac{\ln(9)}{10}$ est un point d'inflexion pour la courbe de f.

5. On trace l'allure de la courbe avec, impérativement, $f(0) = 1$, f croissante, l'asymptote $y = 10$, et le point d'inflexion et la tangente en ce point (la courbe traverse la tangente en un point d'inflexion...) :