Devoir maison de mathématiques

Exercice 1 Calculer la dérivée des fonctions suivantes (simplifier l'expression bien sûr, une seule fraction, expression factorisée ...) :
$f_1(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right) x$; $f_2(x) = \dfrac{5x}{x^2+3}$; $g_1(x) = e^{3x+2}$; $g_2(x) = xe^x$;

Exercice 2 Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 2$, puis, pour tout entier n non nul, par la relation de récurrence $u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n}$.

a) Calculer les premiers termes u_2, u_3 et u_4. Donner les résultats sous forme fractionnaire.

b) Montrer que, pour tout entier n non nul, on a $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.

Exercice 3 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.
Dresser le tableau de variation de f. Préciser les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

Exercice 4 On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = ku_n(1 - u_n)$.

1. Dans cette question, on donne $u_0 = 0,4$ et $k = 1$.
   - a Exprimer la différence $u_{n+1} - u_n$, et en déduire le sens de variation de la suite (u_n).
   - b Démontrer que, pour tout entier n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
   - c En déduire que la suite (u_n) converge.
   - d Déterminer la limite de la suite (u_n).
2. Dans cette question, on donne $u_0 = 0,3$ et $k = 1,8$.
   - a. Etudier les variations de la fonction $f : x \mapsto 1,8x(1-x)$ sur $[0;1]$ et montrer que $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$.
   - b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   - c. En déduire que la suite (u_n) converge.
   - d. Déterminer la limite de la suite (u_n).