Correction du devoir de mathématiques

Exercice 1 $f_1'(x) = 2x$; $f_2'(x) = 5\dfrac{-x^2+3}{(x^2+3)^2}$; $g_1'(x) = 3e^{3x+2}$; $g_2'(x) = (1+x)e^x$;

Exercice 2

a) $u_2 = 2 - \dfrac{1}{u_1} = 2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$ et $u_3 = 2 - \dfrac{1}{u_2} = 2 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$, puis $u_4 = 2 - \dfrac{1}{u_3} = 2 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{5}{4}$

b) Montrons par récurrence les propriétés $P(n) : u_n = \dfrac{n+1}{n}$.

Initialisation : pour $n = 1$, on a $u_1 = 2$ et $\dfrac{n+1}{n} = \dfrac{1+1}{1} = 2$, ce qui montre que $P(1)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que, pour un certain entier n non nul, $P(n)$ soit vraie, c'est-à-dire : $u_n = \dfrac{n+1}{n}$

Alors,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2 - \frac{1}{u_n} = 2 - \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{2(n+1)-n}{n+1} \\ &= \frac{n+2}{n+1} = \frac{(n+1)+1}{n+1} \end{aligned}$$

ce qui montre que la propriété $P(n+1)$ est alors aussi vraie.

Conclusion : on vient de montrer, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier n non nul, on a $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.

Exercice 3 $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x^3 - 3x^2 - 1 \end{cases}$

La dérivée de f est $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$ qui est un trinôme du second degré dont les racines (évidentes une fois factorisé) sont 0 et 1, et on a donc le tableau de signes et de variations :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

En $-\infty$, on a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 2x^3 = \lim_{x\to-\infty} -3x^2 = -\infty$, et donc, par somme des limites, on obtient $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

En $+\infty$, on a une forme indéterminée "$\infty - \infty$". On factorise donc

$$f(x) = 2x^3\left(1 - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2x^3}\right)$$

avec $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2x^3}\right) = 1$, et donc, par produit des limites, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 4 On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = ku_n(1-u_n)$.

1. Dans cette question, on donne $u_0 = 0,4$ et $k = 1$, soit $u_{n+1} = u_n(1-u_n)$.

   a $u_{n+1} - u_n = u_n(1-u_n) - u_n = -u_n^2$.

   Ainsi, pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, soit $u_{n+1} \leqslant u_n$, et la suite (u_n) est donc décroissante.

b Démontrons par récurrence la propriété : $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 0,4$, et on a donc bien $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$.

Hérédité : Supposons que pour un entier n, on ait $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

Alors, $-1 \leqslant -u_n \leqslant 0 \iff 0 \leqslant 1 - u_n \leqslant 1$. Ainsi, comme $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, on a donc en multipliant ces deux dernières inégalités $0 \leqslant u_n (1 - u_n) \leqslant 1$, soit $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

La propriété est donc encore vraie au rang $(n + 1)$.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a donc, pour tout entier n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

c La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par 0. On en déduit donc qu'elle converge vers une limite l.

d La limite l vérifie nécessairement (point fixe) $l = l(1 - l) \iff l = 0$.

Ainsi, la suite (u_n) converge vers 0.

2. Dans cette question, on donne $u_0 = 0,3$ et $k = 1,8$, soit $u_{n+1} = 1,8u_n(1 - u_n)$.

a. Pour tout $x \in [0; 1]$, $f'(x) = 1,8(-2x + 1)$.

De plus, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0,45 \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$.

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$-2x+1$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$0,45$	$\searrow$	0

b. Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 0,3$ et $u_1 = 1,8 \times 0,3\,(1 - 0,3) = 0,378$.

On a bien ainsi $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Hérédité : Supposons que pour un entier n, on ait $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Comme la fonction f est croissante sur $\left[0; \dfrac{1}{2}\right]$, on a donc $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Or, $f(0) = 0$, $f(u_n) = u_{n+1}$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0,45 \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 0,45 \leqslant \dfrac{1}{2}$, et la propriété est encore vraie au rang $(n + 1)$.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, pour tout entier n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

c. La suite (u_n) est donc croissante est majorée par $\dfrac{1}{2}$. On en déduit qu'elle converge vers une limite l.

d. La limite l vérifie nécessairement, d'après le théorème du point fixe, $l = 1,8l(1 - l) \iff 1,8l^2 - 0,8l = 0 \iff l\,(1,8l - 0,8) = 0 \iff l = 0$ ou $l = \dfrac{0,8}{1,8} = \dfrac{4}{9}$.

Or (u_n) est croissante avec $u_0 = 0,3 > 0$, et donc, pour tout entier n, $u_n \geqslant 0,3$.

La limite de la suite ne peut donc être que $l = \dfrac{4}{9}$.