Devoir maison de mathématiques

Exercice 1 Calculer la dérivée des fonctions suivantes (simplifier l'expression bien sûr, une seule fraction, expression factorisée ...) :

$f_3(x) = \dfrac{x - \dfrac{1}{x}}{x + \dfrac{1}{x}}$; $g_3(x) = \dfrac{e^x + 2}{e^x + 1}$; $g_4(x) = \dfrac{e^{x^2}}{e^x + x}$

Exercice 2 On considère la fonction f définie par l'expression $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{2}{x-2}$.
On note C_f sa courbe représentative.
Dresser le tableau de variation de f. Préciser toutes les limites de f.
Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$ en utilisant tous les résultats précédants.

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par $f(x) = \dfrac{2+3x}{4+x}$.

Partie A On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$

On admet que cette suite est bien définie.

1. Calculer u_1.
2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,4]$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$.
4. a) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

   b) On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) ; montrer l'égalité : $\ell = \dfrac{2+3\ell}{4+\ell}$. .

   c) Déterminer la valeur de la limite ℓ.

Partie B On considère la suite (v_n) définie par : $v_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f\left(v_n\right)$.

1. On donne en **Annexe, à rendre avec la copie**, la courbe représentative, $\mathcal{C}_f$, de la fonction f et la droite D d'équation $y = x$.
   Placer sur l'axe des abscisses par construction géométrique les termes v_1, v_2 et v_3 sur l'**annexe, à rendre avec la copie**.
   Quelle conjecture peut-on formuler sur le sens de variation et le comportement de la suite (v_n) quand n tend vers l'infini ?
2. a) Montrer que pour tout entier naturel n, $1 - v_{n+1} = \left(\dfrac{2}{4+v_n}\right)(1 - v_n)$.

   b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
3. La suite (v_n) converge-t-elle ? Si oui, préciser sa limite.

Annexe