Correction du devoir de mathématiques

Exercice 1 $f_3'(x) = \dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$; $g_3'(x) = \dfrac{-e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$; $g_4'(x) = e^{x^2}\dfrac{2xe^x+2x-e^x}{\left(2xe^x+2x^2-e^x-1\right)^2}$

Exercice 2 C'est le signe de la dérivée de f qui nous donne son sens de variation. Ici f est la somme d'une fonction affine (que l'on dérive facilement) et de $\dfrac{2}{x-2} = 2 \times \dfrac{1}{u(x)}$ avec $u(x) = x - 2$ dont la dérivée est $u'(x) = 1$.
La dérivée de $\dfrac{1}{u}$ étant $-\dfrac{u'}{u^2}$, on trouve donc que $f'(x) = 2 - \dfrac{2}{(x-2)^2}$.
Pour pouvoir déterminer le signe de cette expression, on l'exprime sur un seul dénominateur :

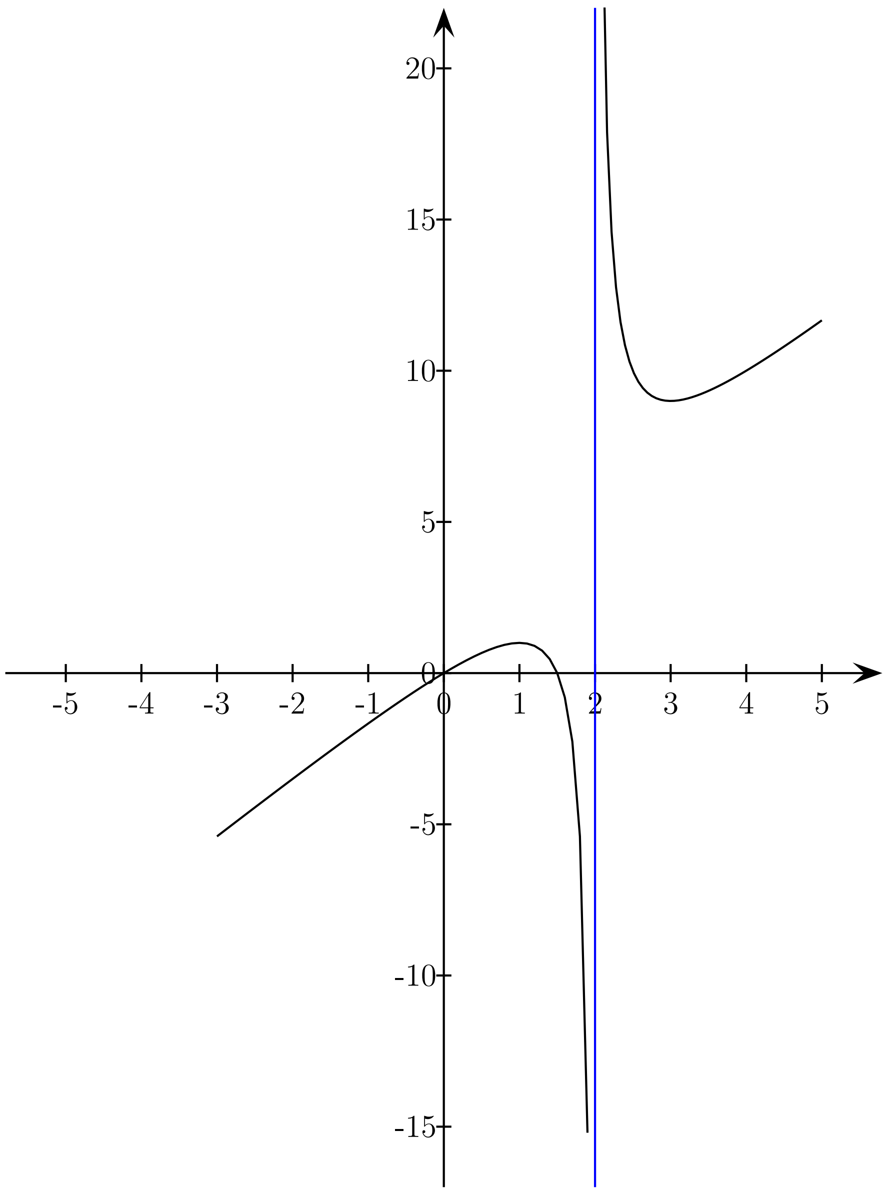
$$f'(x) = \frac{2(x-2)^2-2}{(x-2)^2} = \frac{2x^2-8x+6}{(x-2)^2} = 2\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$$

Le numérateur est un trinôme du second degré dont le discriminant est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 = 2^2 > 0$ et qui admet donc deux racines $x_1 = \dfrac{-(-4)-\sqrt{4}}{2 \times 1} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-(-4)+\sqrt{4}}{2 \times 1} = 3$.
On obtient alors le signe du trinôme, et donc de la dérivée, et enfin le sens de variation de f (on n'oublie pas non plus la valeur interdite. . .).

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
x^2-4x+3		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$(x-2)^2$		$+$	$\vert$	$+$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	9	$\nearrow$	$+\infty$

Limites de f : En l'infini, on a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x-2} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 2x+1 = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2x+1 = +\infty$
.
On obtient alors, par somme des limites, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Lorsque $x \to 2$, on $\displaystyle\lim_{x\to2} 2x+1 = 5$, et $\displaystyle\lim_{x\to2} x-2 = 0$.
Le quotient $\dfrac{2}{x-2}$ tend vers l'infini, et il reste à déterminer son signe en séparant les cas $x < 2 \iff x-2 < 0$ et $x > 2 \iff x-2 > 0$:
$\displaystyle\lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \frac{2}{x-2} = -\infty$ et donc $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty$.
On trouve de même $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \frac{2}{x-2} = +\infty$ et donc $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = +\infty$.
On en déduit de plus que la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.



20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

Exercice 3 $\quad f(x) = \dfrac{2+3x}{4+x}$ *(Bac S : métropole - La Réunion 13 septembre 2019)*

Partie A

1. $u_1 = f\left(u_0\right) = \dfrac{2+9}{4+3} = \dfrac{11}{7}$.
2. La fonction f est définie et dérivable sur $[0\,;\,4]$ et sur cet intervalle :
   $f'(x) = \dfrac{3(4+x) - 1(2+3x)}{(4+x)^2} = \dfrac{12+3x-2-3x}{(4+x)^2} = \dfrac{10}{(4+x)^2}$
   Quotient de nombres positifs ce nombre dérivé est positif quel que soit x dans l'intervalle $[0\,;\,4]$. La fonction f est donc croissante sur $[0\,;\,4]$.
3. Démonstration par récurrence :
   Initialisation
   On a d'après la première question : $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 3$: l'encadrement est vrai au rang 0 ;
   Hérédité
   Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$; par croissance de la fonction f sur $[0\,;\,4]$, on $f(1) \leqslant f\left(u_{n+1}\right) \leqslant f\left(u_n\right) \leqslant f(3)$ ou car $f(1) = \dfrac{5}{5} = 1$ et $f(3) = \dfrac{11}{7} \leqslant 3$,
   $1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$: la relation est donc vraie au rang $n+1$.
   Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai à un rang quelconque n il est vrai au rang suivant $n+1$: d'après le principe de récurrence pour tout naturel n, $\quad 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$.
4. a) D'après la question précédente la suite (u_n) est décroissante, minorée par 1 : elle converge donc vers une limite $\ell \geqslant 1$.

   b) De l'égalité $u_{n+1} = f\left(u_n\right) = \dfrac{2+3u_n}{4+u_n}$ on en déduit par continuité de la fonction f (puisque f est dérivable) :
   $$\ell = \frac{2+3\ell}{4+\ell}.$$
   c) On en déduit que $\ell(4+\ell) = 2+3\ell \iff \ell^2 + \ell - 2 = 0$.
   Or $\Delta = 1 + 4 \times 2 = 9 = 3^2$. Il y a deux solutions :
   $\ell_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$ et $\ell_2 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$.
   Comme $\ell \in [1\ ;\ 3]$, la seule solution est $\ell_2 = 1$.

Partie B

1. Voir l'annexe.
   On peut conjecturer que la suite (v_n) est croissante et qu'elle a pour limite 1.
2. a) $1 - v_{n+1} = 1 - \dfrac{2+3v_n}{4+v_n} = \dfrac{4+v_n-2-3v_n}{4+v_n} = \dfrac{2-2v_n}{4+v_n} = \dfrac{2}{4+v_n}\left(1-v_n\right)$.

   b) *Initialisation* pour $n = 0$, $\quad 1 - v_0 = 0,9$; or $\left(\dfrac{1}{2}\right)^0 = 1$.
   On a bien $0 \leqslant 1 - v_0 \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^0$.
   Hérédité Supposons qu'au rang $n \in \mathbb{N}$ quelconque, on ait $1 - v_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
   On a $1 - v_{n+1} = \dfrac{2}{4+v_n}\left(1-v_n\right)$, donc d'après l'hypothèse de récurrence :
   $1 - v_{n+1} \leqslant \dfrac{2}{4+v_n} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
   Or $0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \iff v_n \geqslant 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \geqslant 0$; il suit que $4 + v_n \geqslant 4$, donc en prenant les inverses $0 \leqslant \dfrac{1}{4+v_n} \leqslant \dfrac{1}{4}$.

On a donc $0 \leqslant 1 - v_{n+1} \leqslant 2 \times \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, soit finalement :

$0 \leqslant 1 - v_{n+1} \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$: l'encadrement est vrai au rang $n+1$.

L'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai à un rang $n$quelconque il est vrai au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence :

quel que soit le naturel n, $\quad 0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

3. Comme $0 < \dfrac{1}{2} < 1$, on sait que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$, donc l'encadrement trouvé à la question précédente montre que la la limite de $1 - v_n = 0$, donc :

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = 1.$$

Annexe