BACCALAUREAT BLANC

2022

MATHEMATIQUES

– ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ –

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé

Le sujet comporte 4 exercices indépendants.
*Le candidat doit traiter **trois exercices** de ces exercices au choix.*
Chaque exercice est noté sur six points ; la clarté et la précision de l'argumentation ainsi que la qualité de la rédaction comptera à hauteur de deux points dans la note finale.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur sa copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse qu'il aura développée.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

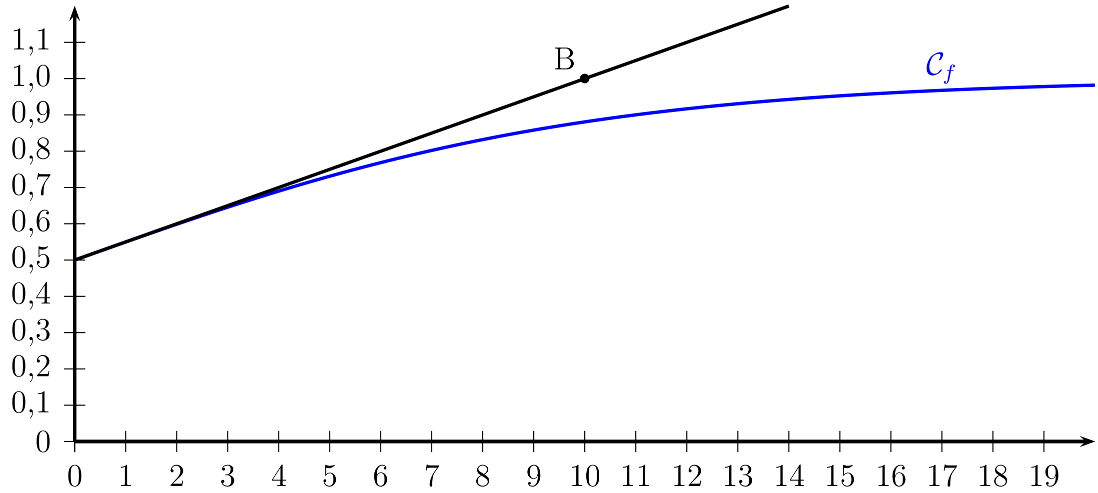
Exercice 1 **<u>Thème :</u> fonction exponentielle**

Partie A

Soit a et b des nombres réels. On considère une fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{a}{1+e^{-bx}}.$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ représentant la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.
La courbe $\mathcal{C}_f$ passe par le point A$(0\,;\ 0{,}5)$. La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A passe par le point B$(10\,;\ 1)$.



1. Justifier que $a = 1$.
   On obtient alors, pour tout réel $x \geqslant 0$, $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-bx}}$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$
   $$f'(x) = \frac{be^{-bx}}{\left(1+e^{-bx}\right)^2}.$$
3. En utilisant les données de l'énoncé, déterminer b.

Partie B

La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction p définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$p(x) = \frac{1}{1+e^{-0{,}2x}}.$$

Le réel x représente le temps écoulé, en année, depuis le 1^er^ janvier 2000.
Le nombre $p(x)$ modélise la proportion d'individus équipés après x années.
Ainsi, pour ce modèle, $p(0)$ est la proportion d'individus équipés au 1^er^ janvier 2000 et $p(3,5)$ est la proportion d'individus équipés au milieu de l'année 2003.

1. Quelle est, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2010 ? On en donnera une valeur arrondie au centième.
2. a) Déterminer le sens de variation de la fonction p sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   b) Calculer la limite de la fonction p en $+\infty$.
   c) Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.
3. On considère que, lorsque la proportion d'individus équipés dépasse 95 %, le marché est saturé.
   Déterminer, en expliquant la démarche, l'année au cours de laquelle cela se produit.
4. a) Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $p(x) = \dfrac{e^{0{,}2x}}{1+e^{0{,}2x}}$.

b) En déduire une primitive P de la fonction p.

c) La proportion moyenne d'individus équipés entre 2008 et 2010 est donnée par le nombre $m = \dfrac{P(10) - P(8)}{2}$.
Déterminer une valeur arrondie au centième de m.

Exercice 2   <u>Thème :</u> géométrie dans l'espace

Dans l'espace muni du repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ d'unité 1 cm, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives $(2\,;\,1\,;\,4)$, $(4\,;\,-1\,;\,0)$, $(0\,;\,3\,;\,2)$ et $(4\,;\,3\,;\,-2)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CD).
2. Soit M un point de la droite (CD).
   a) Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance BM soit minimale.
   b) On note H le point de la droite (CD) ayant pour coordonnées $(3\,;\,3\,;\,-1)$. Vérifier que les droites (BH) et (CD) sont perpendiculaires.
   c) Montrer que l'aire du triangle BCD est égale à 12 cm^2.
3. a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).
   b) Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).
   c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et orthogonale au plan (BCD).
   d) Démontrer que le point I, intersection de la droite Δ et du plan (BCD) a pour coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{8}{3}\right)$.
4. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

Exercice 3   <u>Thème :</u> probabilités

Un institut effectue un sondage pour connaître, dans une population donnée, la proportion de personnes qui sont favorables à un projet d'aménagement du territoire. Pour cela, on interroge un échantillon aléatoire de personnes de cette population, et l'on pose une question à chaque personne.

Les deux parties sont relatives à cette même situation, mais peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A : Nombre de personnes qui acceptent de répondre au sondage

On admet dans cette partie que la probabilité qu'une personne interrogée accepte de répondre à la question est égale à 0,6.

1. L'institut de sondage interroge 700 personnes. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes interrogées qui acceptent de répondre à la question posée.
   a) Quelle est la loi de la variable aléatoire X ? Justifier la réponse.
   b) Quelle est la meilleure approximation de $P(X \geqslant 400)$ parmi les nombres suivants ?

   $$0,92 \qquad 0,93 \qquad 0,94 \qquad 0,95.$$

2. Combien de personnes l'institut doit-il interroger au minimum pour garantir, avec une probabilité supérieure à 0,9, que le nombre de personnes répondant au sondage soit supérieur ou égal à 400.

Partie B : Correction due à l'insincérité de certaines réponses

Dans cette partie, on suppose que, parmi les personnes sondées qui ont accepté de répondre à la question posée, 29 % affirment qu'elles sont favorables au projet.
L'institut de sondage sait par ailleurs que la question posée pouvant être gênante pour les personnes interrogées, certaines d'entre elles ne sont pas sincères et répondent le contraire de leur opinion véritable.
Ainsi, une personne qui se dit favorable peut :

— soit être en réalité favorable au projet si elle est sincère.

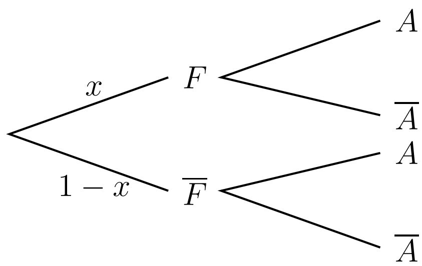
— soit être en réalité défavorable au projet si elle n'est pas sincère.

Par expérience, l'institut estime à 15 % le taux de réponses non sincères parmi les personnes ayant répondu, et admet que ce taux est le même quelle que soit l'opinion de la personne interrogée.
Le but de cette partie est, à partir de ces données, de déterminer le taux réel de personnes favorables au projet, à l'aide d'un modèle probabiliste. On prélève au hasard la fiche d'une personne ayant répondu, et on définit :

- F l'évènement « la personne est en réalité favorable au projet » ;
- $\overline{F}$ l'évènement « la personne est en réalité défavorable au projet » ;
- A l'évènement « la personne affirme qu'elle est favorable au projet » ;
- $\overline{A}$ l'évènement « la personne affirme qu'elle est défavorable au projet ».

Ainsi, d'après les données, on a $p(A) = 0,29$.

1. En interprétant les données de l'énoncé, indiquer les valeurs de $P_F(A)$ et $P_{\overline{F}}(A)$.
2. On pose $x = P(F)$.
   a) Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilité ci-contre.
   b) En déduire une égalité vérifiée par x



3. Déterminer, parmi les personnes ayant répondu au sondage, la proportion de celles qui sont réellement favorables au projet.

Exercice 4   <u>Thème :</u> **suites récurrentes**

On considère la fonction numérique f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Déterminer le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$. (Les limites aux bornes ne sont pas demandées)
2. Calculer u_1 et u_2.
3. a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$.
   b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   c) On appelle L la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de L.
4. a) Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous qui, pour tout réel positif E, détermine la plus petite valeur p tel que $|1 - u_p| < E$.

```
def Seuil(E):
  u=4
  n=0
  while  ...
    u=  ...
    n=n+1
  return n
```

b) Donner la valeur renvoyée par ce programme dans le cas où $E = 10^{-1}$.

5. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = \frac{1}{u_n - 1}$$

a) Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique dont vous donnerez le premier terme et la raison.

b) En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

c) Calculer la limite de la suite (v_n).

d) Puis retrouver par le calcul la limite de la suite (u_n).