Correction du baccalauréat blanc
MATHEMATIQUES – 2022

Exercice 1 *Antille-Guyane, 18 juin 2019, exercice 1*

Partie A

1. $A(0;0,5) \in \mathcal{C}_f \iff f(0) = 0,5 \iff \dfrac{a}{1+e^0} = \dfrac{a}{2} = \dfrac{1}{2} \iff a = 1$

2. On a $f = \dfrac{1}{u}$ avec $u(x) = 1 + e^{-bx}$ donc $u'(x) = -be^{-bx}$

   et alors $f' = -\dfrac{1}{u^2}$, soit $f'(x) = -\dfrac{-be^{-bx}}{(1+e^{-bx})^2} = \dfrac{be^{-bx}}{(1+e^{-bx})^2}$

3. La tangente à $\mathcal{C}_f$ en $A(0;0,5)$ passe par $B(10;1)$. Le coefficient directeur de cette tangente est donc
$$m = \frac{1-0,5}{10-0} = \frac{1}{20} = 0,05$$
   Par ailleurs, ce coefficient directeur est aussi $f'(0)$, et donc
$$f'(0) = \frac{b}{(1+e^0)^2} = \frac{b}{4} = 0,05 \iff b = 0,2$$

Partie B

1. En 2010, on a $x = 10$, et donc la proportion d'individus équipés est $f(10) \simeq 0,88$.

2. a) Comme vu à la question 2, partie A, on a, avec $b = 0,2$, $f'(x) = \dfrac{0,2e^{-0,2x}}{(1+e^{-0,2x})^2}$ et donc, comme $e^{-0,2x} > 0$ et $(1+e^{-0,2x})^2 > 0$, la fonction p est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc aussi sur $[0;+\infty[$.

   b) En $+\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} -0,2x = -\infty$, donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-0,2x} = 0$ et donc, finalement $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = 1$.

   c) Au bout d'un temps assez long, tout le monde va posséder ce type d'équipement.

3. On cherche x tel que
$$\begin{aligned}
p(x) > 95\% = 0,95 \quad &\iff \frac{1}{1+e^{-0,2x}} > 0,95 \\
&\iff 1 + e^{-0,2x} < \frac{1}{0,95} \\
&\iff e^{-0,2x} < \frac{1}{0,95} - 1 = \frac{0,05}{0,95} \\
&\iff -0,2x < \ln\left(\frac{0,05}{0,95}\right) \\
&\iff x > -\frac{1}{0,2}\ln\left(\frac{0,05}{0,95}\right) \simeq 14,7
\end{aligned}$$
   Cela se produit donc au cours de la 14ème année.

4. a)
$$p(x) = \frac{1}{1+e^{-0,2x}} = \frac{e^{0,2x}}{e^{0,2x}} \times \frac{1}{1+e^{-0,2x}} = \frac{e^{0,2x}}{1+e^{0,2x}}$$

   b) Exprimer sous cette forme, on a donc p de la forme $\dfrac{u'}{u}$, et on trouve donc une primitive
$$P(x) = \frac{1}{0,2}\ln\left(1+e^{0,2x}\right) = 5\ln\left(1+e^{0,2x}\right)$$

c) La proportion moyenne d'individus équipés entre 2008 et 2010 est alors

$$m = \frac{P(10)-P(8)}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{0,2}\ln\left(1+e^2\right) + \frac{1}{0,2}\ln\left(1+e^{1,6}\right)\right) \simeq 0,86$$

Exercice 2 — Pondichéry, 4 mai 2018, exercice 4

Dans l'espace muni du repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ d'unité 1 cm, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives (2 ; 1 ; 4), (4 ; −1 ; 0), (0 ; 3 ; 2) et (4 ; 3 ; −2).

1. $\overrightarrow{CD}(4;0;-4)$ est un vecteur directeur de la droite (CD), d'où la représentation paramétrique

$$(CD) : \left\{\begin{array}{l} x = 4t \\ y = 3 \\ z = 2-4t \end{array}\right. \quad , \ t \in \mathbb{R}$$

2. Soit M un point de la droite (CD).

a) BM est minimale si et seulement si M est le projeté orthogonal de B sur la droite (CD) : donc $M \in (CD)$ et $\overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{CD} \iff \overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$.
Soit $M(x,y,z)$, alors il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$M \in (CD) \iff \left\{\begin{array}{l} x = 4t \\ y = 3 \\ z = 2-4t \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \begin{array}{rl} \overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CD} & = 4(x-4)+0(y+1)+(-4)(z-0) = 0 \\ & \iff 4x-4z = 16 \end{array}$$

On doit donc avoir

$$4x-4z = 4(4t)-4(2-4t) = 16 \iff 32t-8 = 16 \iff t = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$$

et donc finalement, $M(3;3;-1)$.

b) $H(3\ ;\ 3\ ;\ -1)$ donc $BH(-1;4;-1)$ et alors $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CD} = -1\times4+4\times0+(-1)\times(-4) = 0$, ce qui montre que les droites (BH) et (CD) sont orthogonales.
De plus, on sait que $H \in (CD)$, donc que ces deux droites sont sécantes en H.
On en déduit donc que ces deux droites (BH) et (CD) sont bien perpendiculaires.

c) D'après ce qui précède, (BH) est la hauteur issue de B dans BCD, et donc

$$\mathcal{A}_{BCD} = \frac{1}{2}\times CD\times BH = \frac{1}{2}\times\sqrt{32}\times\sqrt{18} = \sqrt{144} = 12$$

3. a) On a $\overrightarrow{BC}(-4;4;2)$ et $\overrightarrow{CD}(4;0;-4)$, d'où

$$\begin{array}{rcl} \vec{n}\cdot\overrightarrow{BC} & = & 2\times(-4)+1\times4+2\times2 = 0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CD} & = & 2\times(4)+1\times0+2\times(-4) = 0 \end{array}$$

Ainsi, le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BCD) et ainsi il est orthogonal à tous les vecteurs de ce plan, c'est-à-dire orthogonal au plan (BCD).

b) On déduit de ce qui précède qu'une équation cartésienne du plan (BCD) s'écrit sous la forme

$$2x+y+2z+d = 0$$

avec de plus, par exemple, $B(4;-1;0) \in (BCD)$ donc $2\times4+(-1)+2\times0+d = 0 \iff d = -7$, d'où l'équation

$$2x+y+2z-7 = 0$$

c) La droite Δ est orthogonale au plan (BCD) et donc $\vec{n}$ en est un vecteur directeur, avec de plus $A(2;1;4) \in \Delta$, d'où une représentation paramétrique

$$\Delta : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 4 + 2t \end{array} \right. , \ t \in \mathbb{R}$$

d) Soit $I(x;y;z)$, intersection de la droite Δ et du plan (BCD), alors d'une part $I \in (BCD) \iff 2x + y + 2z - 7 = 0$.

D'autre part, comme $I \in \Delta$, et d'après la question précèdente, il existe un réel t tel que les coordonnées de I vérifient les équations paramétriques de Δ.

On a donc

$$2(2+2t) + (1+t) + 2(4+2t) - 7 = 0 \iff 9t + 6 = 0 \iff t = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3}$$

et on trouve alors les coordonnées

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 2\left(-\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{2}{3} \\ y = 1 + \left(-\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{1}{3} \\ z = 4 + 2\left(-\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{8}{3} \end{array} \right.$$

qui sont les coordonnées recherchées.

4. Comme Δ est perpendiculaire au plan (BCD) en I et passe par A, on en déduit que AI est la hauteur du tétraèdre $ABCD$ de base BCD, et donc

$$\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{3} \times AI \times \mathcal{A}_{ABCD} = \frac{1}{3} \times AI \times 12$$

avec

$$\begin{aligned} AI &= \sqrt{\left(\frac{2}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{8}{3} - 4\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{4^2 + 2^2 + 4^2}{3^2}} = \sqrt{\frac{36}{3^2}} = \frac{6}{3} = 2 \end{aligned}$$

d'où le volume du tétraèdre $\mathcal{V}_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \times 2 \times 12 = 8\,cm^3$

Exercice 3 — Centres étrangers 8 juin 2016, exercice 3

Partie A : Nombre de personnes qui acceptent de répondre au sondage

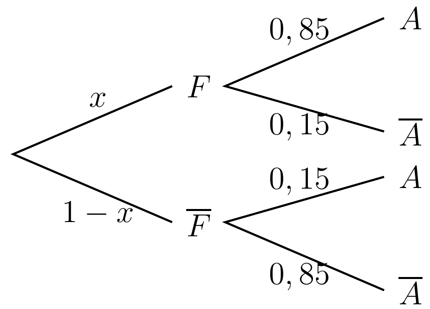
1. a) On répète $n = 700$ fois l'expérience aléatoire "interroger une personne" dont le succès est "la personne accepte de répondre", de probabilité $p = 0,6$. On peut supposer ces répétitions identiques et indépendantes. La variable aléatoire X égale au nombre de succès, c'est-à-dire au nombre de personnes qui acceptent de répondre, suit alors la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ de paramètres $n = 700$ et $p = 0,6$.

   b) Avec une calculatrice, on trouve que la meilleure approximation est $P(X \geqslant 400) \simeq 0,94$

2. On cherche n tel que $X \sim \mathcal{B}(n; 0,6)$ et $P(X \geq 400) > 0,9$.
   On trouve, avec la calculatrice, $n = 694$ au minimum.

Partie B : Correction due à l'insincérité de certaines réponses

1. L'énoncé donne les deux probabilités conditionnelles : $P_{\overline{F}}(A) = P_F\left(\overline{A}\right) = 0,15$.
   On en déduit aussi que $P_F(A) = 1 - P_F(\overline{A}) = 0,85$.
2. a)



   b) On en déduit que

$$P(A) = 0,29 = 0,85x + 0,15(1-x) \iff 0,7x = 0,14 \iff x = 0,2$$

3. On en déduit que parmi les personnes ayant répondu, 20% sont réellement favorables au projet.

Exercice 4 On considère la fonction numérique f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+1}$ et la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$.

1. On a $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 3x-1$ donc $u'(x) = 3$ et $v(x) = x+1$ donc $v'(x) = 1$, d'où $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, soit
$$f'(x) = \frac{3(x+1) - (3x-1)}{(x+1)^2} = \frac{4}{(x+1)^2}$$
   Pour tout $x \geq 0$, on a $(x+1)^2 > 0$, et donc aussi $f'(x) > 0$, ce qui montre que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
2. $$\begin{aligned} u_1 &= f(u_0) = f(4) = \frac{3\times 4 - 1}{4+1} = \frac{11}{5} = 2,2 \\ u_2 &= f(u_1) = \frac{3\times\frac{11}{5} - 1}{\frac{11}{5}+1} = \frac{28}{16} = \frac{7}{4} = 1,75 \end{aligned}$$
3. a) On note, pour $n \in \mathbb{N}$, P_n : $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$.
   Initialisation : pour $n = 0$, on a bien $1 \leq 1,75 \leq 2,2 \leq 4$ et P_0 est donc vraie.

   Hérédité : Supposons que, pour un certain entier n, P_n soit vraie, c'est-à-dire que $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$.
   Comme f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc sur $[1;+\infty[$, f conserve l'ordre et on a donc alors
$$f(1) \leq f\left(u_{n+1}\right) \leq f\left(u_n\right) \leq f(4)$$
   or, $f(1) = 1$, $f\left(u_{n+1}\right) = u_{n+1}$, $f\left(u_n\right) = u_{n+1}$ et enfin $f(4) = \frac{11}{5}$, d'où, ces dernières inégalités se réécrivent
$$1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq \frac{11}{5} \leq 4$$
   et qui montre que P_{n+1} est donc encore vraie.

   Conclusion : On vient donc de démontrer, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier n, P_n est vraie, c'est-à-dire que $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$

   b) Le résultat précédent montre que la suite (u_n) est décroissante car $u_{n+1} \leq u_n$, et de plus que cette suite est minorée par 1.
   On en déduit donc qu'elle converge vers une limite $L \geq 1$.

c) Comme on sait que cette suite récurrente converge vers L, cette limite vérifie nécessairement la relation $L = f(L)$ (théorème du point fixe, car f est continue $[1; +\infty[$), soit, avec $L \geq 1$, donc $L + 1 \neq 1$,

$$\begin{aligned} & f(L) = \frac{3L-1}{L+1} = L \\ \iff & 3L - 1 = L(L+1) \\ \iff & L^2 - 2L + 1 = 0 \\ \iff & (L-1)^2 = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, on trouve la limite $L = 1$.

4. a)

```
def Seuil(E):
  u=4
  n=0
  while abs(1-u)>=E
    u= (3*u-1)/(u+1)
    n=n+1
  return n
```

b) La valeur renvoyée par ce programme dans le cas où $E = 10^{-1}$ est 20.

5. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = \frac{1}{u_n - 1}$$

a) On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{v_{n+1} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} \\ &= \frac{1}{f(u_n) - 1} - \frac{1}{u_n - 1} \\ &= \frac{1}{\frac{3u_n - 1}{u_n + 1} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} \\ &= \frac{u_n + 1}{2u_n - 2} - \frac{1}{u_n - 1} \\ &= \frac{u_n + 1}{2(u_n - 1)} - \frac{1}{u_n - 1} \\ &= \frac{u_n - 1}{2(u_n - 1)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est arithmétique de raison $r = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{u_0 - 1} = \dfrac{1}{3}$

b) On en déduit que, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 + nr = \dfrac{1}{3} + \dfrac{n}{2}$.

c) On trouve donc que $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n) = +\infty$.

d) On a

$$v_n = \frac{1}{u_n - 1} \iff u_n = \frac{1}{v_n} + 1$$

et, en utilisant le résultat précédent, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{v_n} = 0$, d'où on retrouve que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.