Correction du devoir de mathématiques

Exercice 1 $(E_1) : 3^x = 5 \iff \ln(3^x) = x\ln(3) = \ln(5) \iff x = \dfrac{\ln(5)}{\ln(3)}$.

$(E_2) : \ln(x+2) + \ln(x) = 3$ Les expressions sont définies pour $x > 0$ et $x + 2 > 0 \iff x > -2$, donc $x > 0$.
$(E_2) \iff \ln(x(x+2)) = 3 \iff x(x+2) = e^3 \iff x^2 + 2x - e^3 = 0$

$\Delta = 4+4e^3 = 4(1+e^3) > 0$ et l'équation admet donc deux solutions $x_1 = \dfrac{-2-\sqrt{4(1+e^3)}}{2} = -1-\sqrt{1+e^3}$ et $x_2 = -1+\sqrt{1+e^3}$.
Comme $x_1 < 0$, l'équation (E_2) admet donc pour unique solution $x_2 = -1+\sqrt{1+e^3}$.

Exercice 2 On a, pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = u_0 q^n = 2\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \dfrac{2}{3^n}$, et ainsi,

$$u_n > 0,01 \iff 2\left(\frac{1}{3}\right)^n > 0,5 \iff \left(\frac{1}{3}\right)^n > \frac{0,01}{2} = 0,005 \iff \ln\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) > \ln(0,005)$$

car la fonction ln est strictement croissante, donc

$$n\ln\left(\frac{1}{3}\right) = -n\ln(3) > \ln(0,005)$$

puis, en divisant par $-\ln(3) < 0$,

$$n < -\frac{\ln(0,005)}{\ln(3)} \simeq 4,8$$

Ainsi, $u_n < 0,5$ pour les entiers $n \leqslant 4$.

Exercice 3 On a

$$\frac{3\ln(x)+1}{\ln(x)-10} = \frac{3\ln(x)\left(1+\dfrac{1}{3\ln(x)}\right)}{\ln(x)\left(1-\dfrac{10}{\ln(x)}\right)} = \frac{1+\dfrac{1}{3\ln(x)}}{1-\dfrac{10}{\ln(x)}}$$

et, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{3\ln(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{10}{\ln(x)} = 0$,
et on obtient finalement $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3\ln(x)+1}{\ln(x)-10} = 3$

On a une forme indéterminée, et on factorise donc par le terme prépondérant qui est x ici :

$$\ln(x) - x + 10 = x\left(\frac{\ln(x)}{x} - 1 + \frac{10}{x}\right)$$

où on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{10}{x} = 0$ et par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.
On obtient donc finalement, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) - x + 10 = -\infty$.

Exercice 4

1. On a $f = uv$ avec $u(x) = x$, donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln(x)$ donc $v'(x) = \dfrac{1}{x}$, et alors $f' = u'v + uv'$, soit $f'(x) = \ln(x) + x\dfrac{1}{x} = \ln(x) + 1$.

   Ensuite, on a $f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$ pour $x > 0$, ce qui montre que f est convexe sur $]0; +\infty[$.
2. La tangente a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1) = x - 1$.
3. Comme f est convexe, sa courbe est au-dessus de ses tangentes, en particulier au-dessus de la tangente en 1, c'est-à-dire que, pour tout $x > 0$, on a $f(x) = x\ln(x) \geqslant x - 1$.