Devoir de mathématiques

Exercice 1 Déterminer les limites des suites : $u_n = n^3 + 3n^2 + \dfrac{2}{n} + 300$ $\quad v_n = \dfrac{3n^2+10}{2n^2-5}$

Exercice 2 On considère la suite (u_n) définie par : $u_1 = -5$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} = \left(1 + \frac{2}{n}\right) u_n + \frac{18}{n} - 4\,.$$

1. Calculer u_2.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = 4n - 9$.

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x) = 6 - \dfrac{5}{x+1}$.

Le but de cet exercice est d'étudier des suites (u_n) définies par un premier terme positif ou nul u_0 et vérifiant pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. **Etude de propriétés de la fonction f**

   a. Etudier le sens de variation de la fonction f sur $[0;+\infty[$.

   b. Résoudre dans l'intervalle $[0;+\infty[$ l'équation $f(x) = x$. On note α la solution.

   c. Montrer que si x appartient à l'intervalle $[0;\alpha]$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0;\alpha]$.

2. **Etude de la suite (u_n) pour $u_0 = 0$**

   Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \dfrac{5}{u_n+1}$.

   a. La courbe représentative de f est donnée ci-dessous.
   Placer sur ce graphique le points A_0 de coordonnées $(u_0;0)$ et construire les points A_1, A_2, A_3 et A_4 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 et u_4.
   Quelles conjectures peut-on émettre quant au sens de variation et à la convergence de la suite (u_n) ?

   b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.
   Quel est alors le sens de variation de la suite (u_n) ?