Devoir de mathématiques

Exercice 1 Déterminer les limites des suites définies par :

$$u_n = \frac{6n^3+1}{4n(n^2+2n+1)} \quad , \quad v_n = 5\left(\frac{9}{4}\right)^n - 2 \quad , \quad w_n = \frac{5+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{3+\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

Exercice 2

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\left\{\begin{array}{lcl} v_0 & = & 1 \\ v_{n+1} & = & \dfrac{9}{6-v_n} \end{array}\right.$

On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par

$$w_n = \frac{1}{v_n - 3}.$$

1. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$
2. En déduire l'expression de (w_n), puis celle de (v_n) en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (v_n).

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. On considère la suite (u_n) définie par : $\left\{\begin{array}{l} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array}\right.$

   a) Calculer u_1.

   b) Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\sqrt{2} \leqslant u_{n+1} < u_n \leqslant \dfrac{3}{2}$

   c) On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - \sqrt{2} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)$ *(à démontrer en DM !)*

   Démontrer, par récurrence, que pour tout entier n, $0 < u_n - \sqrt{2} \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \left(u_0 - \sqrt{2}\right)$.

   d) En déduire la limite de la suite (u_n).