Correction du devoir de mathématiques

A

Exercice 1 Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,2$.

1. $P(X = 5) = \binom{30}{5} 0,2^5 0,8^{25}$

2. a) $P(X = 6) \simeq 0,18$ b) $P(X \leqslant 6) \simeq 0,61$ c) $P(X > 10) \simeq 0,03$

   d) $P(4 \leqslant X \leqslant 8) \simeq 0,75$ e) $E(X) = 30 \times 0,2 = 6$ f) $\sigma(X) = \sqrt{npq} \simeq 2,19$

   g) $P_{(X \geqslant 4)}(X \leqslant 8) = \dfrac{P((X \leqslant 8) \cap (X \geqslant 4))}{P(X \geqslant 4)} = \dfrac{P(4 \leqslant X \leqslant 8)}{P(X \geqslant 4)} \simeq \dfrac{0,75}{0,88} \simeq 0,85$

Exercice 2

a) On a $P(X \geqslant 0) = 1 - P(X < 0) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$

b) L'espérance est $E(X) = \dfrac{1}{4} \times (-2) + \dfrac{1}{3} \times 1 + \dfrac{1}{4} \times 2 + \dfrac{1}{12} \times 3 + \dfrac{1}{12} \times 5 = \dfrac{12}{12} = 1$

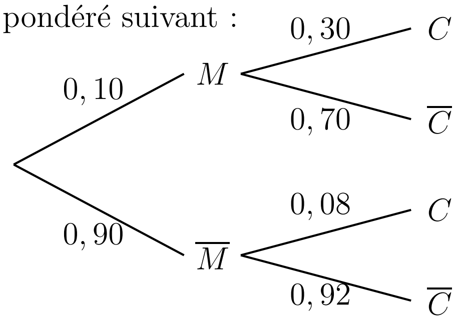
c) La variance est

$$\begin{aligned} V(X) &= \frac{1}{4} \times (-2-1)^2 + \frac{1}{3} \times (1-1)^2 + \frac{1}{4} \times (2-1)^2 + \frac{1}{12} \times (3-1)^2 + \frac{1}{12} \times (5-1)^2 \\ &= \frac{9}{4} + 0 + \frac{1}{4} + \frac{4}{12} + \frac{16}{12} \\ &= \frac{50}{12} = \frac{25}{6} \end{aligned}$$

L'écart type est alors $\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\dfrac{25}{6}} = \dfrac{5}{\sqrt{6}} \simeq 2$

Exercice 3 **Bac 2013, Amérique du Nord**

Partie A On peut construire l'arbre pondéré suivant :



1. a. $P(M \cap C) = P(M) \times P_M(C) = 0,1 \times 0,3 = 0,03$

   b. En utilisant l'arbre (ou d'après la formule des probabilités totales) :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(M \cap C) + P\left(\overline{M} \cap C\right) \\ &= P(M) \times P_M(C) + P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(C) \\ &= 0,1 \times 0,3 + 0,9 \times 0,08 = 0,03 + 0,072 = 0,102 \end{aligned}$$

2. On choisit au hasard une victime d'un accident cardiaque.
   La probabilité qu'elle présente une malformation cardiaque de type anévrisme est $P_C(M)$:
   $P_C(M) = \dfrac{P(M \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0,03}{0,102} \approx 0,2941$

Partie B

1. On peut considérer que, choisir au hasard un échantillon de 400 personnes, peut être assimilé à un tirage avec remise de 400 personnes dans la population totale.

   Or la probabilité qu'une personne souffre d'une malformation cardiaque de type anévrisme est $P(M) = 0,1$ d'après l'énoncé.

   Donc on peut dire que la variable aléatoire X qui donne le nombre de personnes souffrant de cette malformation cardiaque suit une loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = 0,1$.

2. Comme X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\,(400\,;0,1)$, $P\,(X = 35) = \begin{pmatrix} 400 \\ 35 \end{pmatrix} 0,1^{35}(1-0,1)^{400-35}$;

   le résultat donné par la calculatrice est approximativement $0,0491$.

3. La probabilité que 30 personnes de ce groupe, au moins, présentent une malformation cardiaque de type anévrisme est $P\,(X \geqslant 30)$ qui est égale à $1 - P\,(X < 30) = 1 - P\,(X \leqslant 29)$.

   D'après la calculatrice, $P\,(X \leqslant 29) \approx 0,0357$, donc $P\,(X \geqslant 30) \approx 0,9643$.

Exercice 4 Le client répète $n = 5$ fois l'expérience aléatoire : "acheter un livre au hasard" dont le succès est "le livre est primé" de probabilité $p = 10\% = 0,1$.
Comme le nombre de livres en ventes est important, on peut supposer ces répétitions identiques et indépendantes.
Ainsi, la variable aléatoire X égale au nombre au nombre de succès, c'est-à-dire au nombre delivres primés, suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,1$.
La probabilité d'avoir au moins un livre primé dans ses achats est donc

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1-p)^5 \simeq 0,41$$

Le client se trompe donc.

En augmentant la valeur de n, on trouve qu'il faut acheter au moins $n = 7$ livres pour que cette probabilité devienne supérieure à 0,5.

Correction du devoir de mathématiques B

Exercice 1 Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0,15$.

1. $P(X = 5) = \binom{40}{5} 0,15^5 0,85^{35}$

2. a) $P(X = 6) \simeq 0,17$ b) $P(X \leqslant 6) \simeq 0,61$ c) $P(X > 10) \simeq 0,03$

   d) $P(4 \leqslant X \leqslant 8) \simeq 0,73$ e) $E(X) = 40 \times 0,15 = 6$ f) $\sigma(X) = \sqrt{npq} \simeq 2,26$

   g) $P_{(X\geqslant 4)}(X \leqslant 8) = \dfrac{P((X \leqslant 8) \cap (X \geqslant 4))}{P(X \geqslant 4)} = \dfrac{P(4 \leqslant X \leqslant 8)}{P(X \geqslant 4)} \simeq \dfrac{0,73}{0,87} \simeq 0,84$

Exercice 2

a) On a $P(X \geqslant 0) = 1 - P(X < 0) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$

b) L'espérance est $E(X) = \dfrac{1}{4} \times (-2) + \dfrac{1}{3} \times 1 + \dfrac{1}{4} \times 2 + \dfrac{1}{12} \times 3 + \dfrac{1}{12} \times 5 = \dfrac{12}{12} = 1$

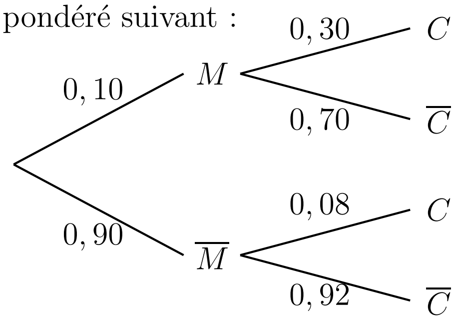
c) La variance est

$$\begin{aligned} V(X) &= \frac{1}{4} \times (-2-1)^2 + \frac{1}{3} \times (1-1)^2 + \frac{1}{4} \times (2-1)^2 + \frac{1}{12} \times (3-1)^2 + \frac{1}{12} \times (5-1)^2 \\ &= \frac{9}{4} + 0 + \frac{1}{4} + \frac{4}{12} + \frac{16}{12} \\ &= \frac{50}{12} = \frac{25}{6} \end{aligned}$$

L'écart type est alors $\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\dfrac{25}{6}} = \dfrac{5}{\sqrt{6}} \simeq 2$

Exercice 3 **Bac 2013, Amérique du Nord**

Partie A On peut construire l'arbre pondéré suivant :



1. a. $P(M \cap C) = P(M) \times P_M(C) = 0,1 \times 0,3 = 0,03$

   b. En utilisant l'arbre (ou d'après la formule des probabilités totales) :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(M \cap C) + P\left(\overline{M} \cap C\right) \\ &= P(M) \times P_M(C) + P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(C) \\ &= 0,1 \times 0,3 + 0,9 \times 0,08 = 0,03 + 0,072 = 0,102 \end{aligned}$$

2. On choisit au hasard une victime d'un accident cardiaque.
   La probabilité qu'elle présente une malformation cardiaque de type anévrisme est $P_C(M)$:
   $P_C(M) = \dfrac{P(M \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0,03}{0,102} \approx 0,2941$

Partie B

1. On peut considérer que, choisir au hasard un échantillon de 400 personnes, peut être assimilé à un tirage avec remise de 400 personnes dans la population totale.

   Or la probabilité qu'une personne souffre d'une malformation cardiaque de type anévrisme est $P(M) = 0,1$ d'après l'énoncé.

   Donc on peut dire que la variable aléatoire X qui donne le nombre de personnes souffrant de cette malformation cardiaque suit une loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = 0,1$.

2. Comme X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(400\,;0,1)$, $P(X = 35) = \begin{pmatrix} 400 \\ 35 \end{pmatrix} 0,1^{35}(1-0,1)^{400-35}$;

   le résultat donné par la calculatrice est approximativement $0,0491$.

3. La probabilité que 30 personnes de ce groupe, au moins, présentent une malformation cardiaque de type anévrisme est $P(X \geqslant 30)$ qui est égale à $1 - P(X < 30) = 1 - P(X \leqslant 29)$.

   D'après la calculatrice, $P(X \leqslant 29) \approx 0,0357$, donc $P(X \geqslant 30) \approx 0,9643$.

Exercice 4 Le client répète $n = 10$ fois l'expérience aléatoire : "acheter un livre au hasard" dont le succès est "le livre est primé" de probabilité $p = 5\% = 0,05$.
Comme le nombre de livres en ventes est important, on peut supposer ces répétitions identiques et indépendantes.
Ainsi, la variable aléatoire X égale au nombre au nombre de succès, c'est-à-dire au nombre delivres primés, suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,05$.
La probabilité d'avoir au moins un livre primé dans ses achats est donc

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1-p)^5 \simeq 0,40$$

Le client se trompe donc.

En augmentant la valeur de n, on trouve qu'il faut acheter au moins $n = 14$ livres pour que cette probabilité devienne supérieure à 0,5.