Corrigé du devoir de mathématiques

Exercice 1

1. Il y a $5\,! = 120$ façons de permuter l'ordre de 5 objets distincts.
   En considérant l'arbre des possibilités, on a 5 possibilités pour le 1er rang, à chacune desquelles on a 4 possibilités pour le second choix, puis 3 possibilités pour le 3ème, etc... D'où le nombre total $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.
2. a) Il y a $4! = 24$ nombres commençant par 1 (correspondant à toutes les permutations des chiffres 2, 3, 4 et 5) et, de même 24 nombres commençant par 2.
   Le 50è nombre commence donc par 3 et c'est le 2ème de cette série : 31245 est le premier. La réponse est donc 31254.

   b) Le premier nombre commençant par 4 est 41235, de rang $24 + 24 + 24 + 1 = 73$. Il y a $3! = 6$ nombres commençant par 41. Le plus petit nombre commençant par 42 est donc de rang 78. Deux nombres commencent par 421 et deux nombres commencent par 423. Le rang de 42513 est donc 83.
3. Il y a $5 \times 4 = 20$ nombres à deux chiffres que l'enfant peut ainsi tirer.
   Les nombres inférieurs à 30 sont ceux commençant par un 1 ou un 2, et il y en a 8 : 12, 13, 14 , 15 et 21, 23, 24, 25.

   La probabilité recherchée est donc $\dfrac{8}{20} = \dfrac{2}{5}$ 12,

Exercice 2 *baccalauréat S Pondichéry, 21 avril 2010*

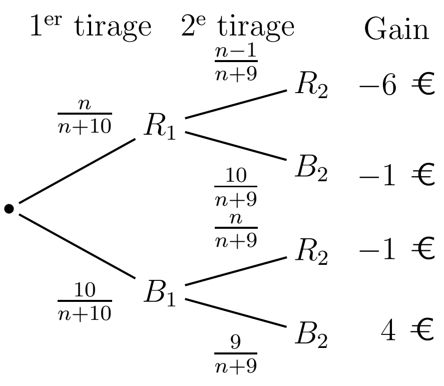
1. Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule de l'urne donc on est en situation d'équiprobabilité.
   Le nombre initial de boules est $n+10$, le joueur choisit une boule donc a $(n+10)$ choix possibles et ne remet pas cette boule dans l'urne donc le nombre de boules possibles lors du second tirage est $(n+9)$.

   a) Lors d'un tirage de deux boules,
   — soit le joueur tire deux boules blanches, et gagne 4 €
   — soit le joueur tire une boule blanche et une boule rouge, et gagne $2 - 3 = -1$ €
   — soit le joueur tire deux boules rouges, et gagne -6 €.

   Si le joueur tire une boule rouge au premier tirage, l'urne contient 10 boules blanches et $n - 1$ boules rouges.

   Si le joueur tire une boule blanche au premier tirage, l'urne contient 9 boules blanches et n boules rouges.

   D'où l'arbre de choix :



$$p(X = -1) = \frac{n}{n+10} \times \frac{10}{n+9} + \frac{10}{n+10} \times \frac{n}{n+9} = \frac{20n}{(n+10)(n+9)}.$$

b) $p(X=-6) = \dfrac{n}{n+10} \times \dfrac{n-1}{n+9} = \dfrac{n(n-1)}{(n+10)(n+9)}$.

$p(X=4) = \dfrac{10}{n+10} \times \dfrac{9}{n+9} = \dfrac{90}{(n+10)(n+9)}$.

c) $\mathrm{E}(X) = 4p(X=4) + (-1)p(X=-1) + (-6)p(X=-6)$ donc

$\mathrm{E}(X) = \dfrac{360}{(n+10)(n+9)} - \dfrac{20n}{(n+10)(n+9)} - \dfrac{6n(n-1)}{(n+10)(n+9)}$.

$\mathrm{E}(X) = \dfrac{-6n^2+6n-20n+360}{(n+10)(n+9)} = \dfrac{-6n^2-14n+360}{(n+10)(n+9)}$.

d) $\mathrm{E}(X) > 0 \iff -6n^2 - 14n + 360 > 0$.

Il s'agit d'un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = 14^2 + 4 \times 6 \times 360 = 94^2 > 0$, donc les solutions sont $x_1 = -9,\ x_2 = \dfrac{20}{3}$.

Le trinôme est négatif sauf entre les racines, donc n étant un entier supérieur ou égal à 2, l'espérance mathématique est strictement positive si $2 \leqslant n \leqslant 6$.

2. Les évènements « obtenir au moins une boule rouge au cours de ces 20 tirages » et « obtenir 20 boules blanches au cours de ces 20 tirages » sont contraires donc : $p = 1 - \left(\dfrac{10}{n+10}\right)^{20}$.

$p > 0,999 \iff \left(\dfrac{10}{n+10}\right)^{20} < 1 - 0,999 \iff \left(\dfrac{10}{n+10}\right)^{20} < 0,001 \iff$

$\dfrac{10}{n+10} < \sqrt[20]{0,001} \iff n+10 > \dfrac{10}{\sqrt[20]{0,001}} \iff n > \dfrac{10}{\sqrt[20]{0,001}} - 10 \iff n \geqslant 5$.

Exercice 3 On répète $n = 6$ fois l'expérience aléatoire "faire un devoir" dont le succès est "l'élève est présent" de probabilité $p = 0,96$.

On suppose ces répétitions identiques et indépendantes.

On note X la variable aléatoire égale eu nombre du succès, c'est-à-dire au nombre de devoir où l'élève est présent.

Alors X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(6; 0,96)$ et

a) La probabilité qu'un élève soit présent aux six devoirs est $P(X=6) = 0,96^6 \simeq 0,78$.

b) La probabilité qu'un élève soit absent aux six devoirs est $P(X=0) = 0,04^6 \simeq 4.10^{-9}$.

c) La probabilité qu'un élève soit présent à un seul devoirs est $P(X=1) = \dbinom{6}{1} 0,96^1 0,04^5 \simeq 6.10^{-7}$