Devoir de mathématiques

Exercice 1 Calculer les intégrales : $I_1 = \displaystyle\int_0^2 5x^3\,dx$; $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$; $I_3 = \displaystyle\int_{-1}^1 x^2\left(x^3+3\right)^2\,dx$

À l'aide d'une intégration par parties, calculer $I_4 = \displaystyle\int_0^1 xe^{2x}\,dx$

Exercice 2
Partie A
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par $\mathcal{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

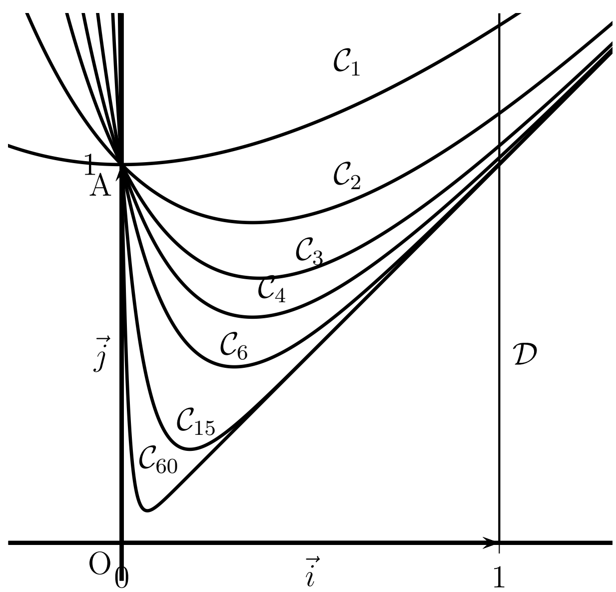
$$f_1(x) = x + \mathrm{e}^{-x}.$$

1. Justifier que $\mathcal{C}_1$ passe par le point A de coordonnées $(0\ ;\ 1)$.
2. Déterminer le tableau de variation de la fonction f_1.

Partie B
L'objet de cette partie est d'étudier la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \left(x + \mathrm{e}^{-nx}\right)\,dx$

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x + e^{-nx}$.

   Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe $\mathcal{C}_n$ pour plusieurs valeurs de l'entier n et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = 1$.



   a. Interpréter géométriquement l'intégrale I_n.
   b. En utilisant cette interprétation, formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) et sa limite éventuelle. On précisera les éléments sur lesquels on s'appuie pour conjecturer.

2. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-(n+1)x}\left(1 - e^x\right)\,dx.$$

   En déduire le signe de $I_{n+1} - I_n$ puis démontrer que la suite (I_n) est convergente.

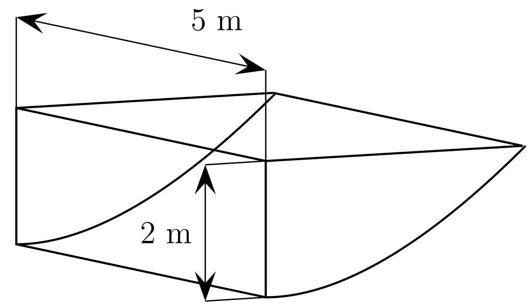
3. Déterminer l'expression de I_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (I_n).

Exercice 3

Un particulier veut faire fabriquer un récupérateur d'eau.
Ce récupérateur d'eau est une cuve qui doit respecter le cahier des charges suivant :

— elle doit être située à deux mètres de sa maison ;
— la profondeur maximale doit être de deux mètres ;
— elle doit mesurer cinq mètres de long ;
— elle doit épouser la pente naturelle du terrain.

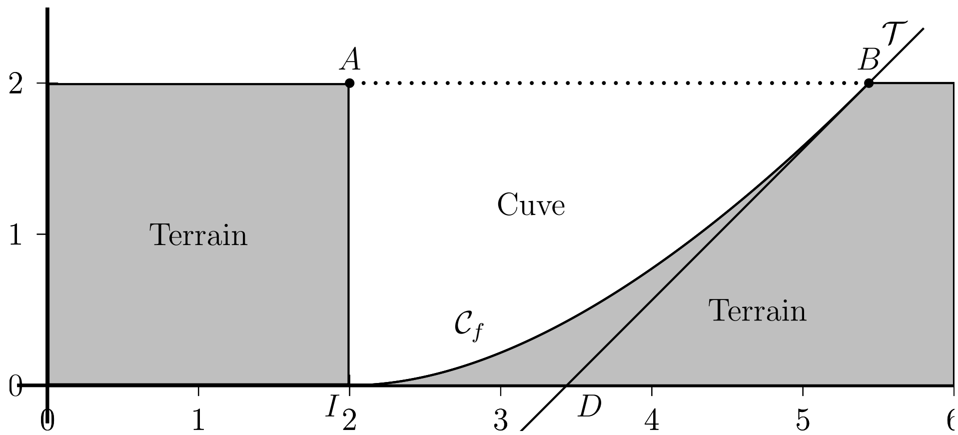
Cette cuve est schématisée ci-contre.



La partie incurvée est modélisée par la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f sur l'intervalle $[2; 2e]$ définie par :

$$f(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2.$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ est représentée ci-dessous dans un repère orthonormé **d'unité 1m** et constitue une vue de profil de la cuve. On considère les points $A(2; 2)$, $I(2; 0)$ et $B(2e; 2)$.



L'objectif de cet exercice est d'évaluer le volume de la cuve.

1. Justifier que les points B et I appartiennent à la courbe $\mathcal{C}_f$ et que l'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point I.
2. On note $\mathcal{T}$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B, et D le point d'intersection de la droite $\mathcal{T}$ avec l'axe des abscisses.
   a) Déterminer une équation de la droite $\mathcal{T}$ et en déduire les coordonnées de D.
   b) On appelle S l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, les droites d'équations $y = 2$, $x = 2$ et $x = 2e$.
   S peut être encadrée par l'aire du triangle ABI et celle du trapèze $AIDB$.
   Quel encadrement du volume de la cuve peut-on en déduire ?
3. a) Montrer que, sur l'intervalle $[2; 2e]$, la fonction G définie par
   $$G(x) = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4}$$
   est une primitive de la fonction g définie par $g(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right)$.
   b) En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[2; 2e]$.
   c) Déterminer la valeur exacte de l'aire S et en déduire une valeur approchée du volume V de la cuve au m^3 près.