Corrigé du devoir de mathématiques

Exercice 1 $\quad I_1=\int_0^2 5x^3\,dx=\left[\frac{5}{4}x^4\right]=\frac{5}{4}\times 2^4-0=20$

$I_2=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}\,dx=\left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1=\frac{1}{2}\ln(2)-\frac{1}{2}\ln(1)=\frac{1}{2}\ln(2)$

$I_3=\int_{-1}^1 x^2\left(x^3+3\right)^2\,dx=\left[\frac{1}{9}\left(x^3+3\right)^3\right]_{-1}^1=\frac{1}{9}\left(4^3-2^3\right)=\frac{56}{9}$

En intégrant par parties, en posant $u=x$ et $v'=e^{2x}$, donc $u'=1$ et $v=\frac{1}{2}e^{2x}$,

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int_0^1 xe^{2x}\,dx\\
&= \left[\frac{1}{2}xe^{2x}\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}e^{2x}\,dx\\
&= \frac{1}{2}e^2-\left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^1\\
&= \frac{1}{2}e^2-\left(\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}e^0\right)\\
&= \frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Exercice 2 $\quad$ *Bac S, 19 juin 2014, 5 points*

Partie A

1. On a $f_1(0)=0+e^{-0}=1$ et donc $A(0;1)\in\mathcal{C}_1$.
2. Comme $x\mapsto -x$ et $x\mapsto e^x$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, f_1 est aussi définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, comme somme et composée de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, avec, pout tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=1-e^{-x}$.
De plus, $f'(x)=1-e^{-x}>0 \iff e^{-x}<1=e^0 \iff -x<0$, car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et ainsi, $f'(x)>0\iff x>0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
f_1		↘	1	↗	

Partie B

1. a. I_n est l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_n$: l'aire du domaine compris entre les droites verticales d'équation $x=0$ et $x=1$, et entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}_n$.

   b. Il semblerait que la courbe $\mathcal{C}_{n+1}$ soit en dessous de la courbe $\mathcal{C}_n$. On peut donc conjecturer que la suite (I_n) est décroissante.
   Il semblerait de plus que lorsque n devient grand, la courbe $\mathcal{C}_n$ se rapproche de la diagonale du carré de côté $[OA]$. On peut ainsi conjecturer que la suite (I_n) est convergente, de limite $\frac{1}{2}$.

2. Pour tout entier n,

$$\begin{aligned}
I_{n+1}-I_n &= \int_0^1\left(x+e^{-(n+1)x}\right)\,dx-\int_0^1\left(x+e^{-nx}\right)\,dx\\
&= \int_0^1\left[\left(x+e^{-(n+1)x}\right)-\left(x+e^{-nx}\right)\right]\,dx\\
&= \int_0^1\left(e^{-(n+1)x}-e^{-nx}\right)\,dx\\
&= \int_0^1 e^{-(n+1)x}\left(1-e^x\right)\,dx
\end{aligned}$$

car $e^{-(n+1)x}e^x = e^{-(n+1)x+x} = e^{-nx}$.

De plus, pour tout $x \in [0;1]$, $e^{-(n+1)x} > 0$, et $e^x \geqslant e^0 = 1$, car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $[0;1]$, et donc, $1 - e^x \leqslant 0$.
On en déduit que pour tout $x \in [0;1]$, $e^{-(n+1)x}\left(1-e^x\right) \leqslant 0$, et donc, par positivité de l'intégrale, que

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-(n+1)x}\left(1-e^x\right)\,dx \leqslant 0$$

Ainsi, la suite (I_n) est décroissante.

Comme pour tout $x \in [0;1]$ et pour tout entier n, $e^{-nx} > 0$, et donc, $f_n(x) = x + e^{-nx} > 0$, on a $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx > 0$.
Ainsi, (I_n) est une suite décroissante et minorée par 0 : (I_n) est donc convergente.

3. Pour tout entier n,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \left(x + e^{-nx}\right)\,dx = \int_0^1 x\,dx + \int_0^1 e^{-nx}\,dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}e^{-n} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\left(1-e^{-n}\right) \end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, on a donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \dfrac{1}{2}$, ce qui démontre la conjecture émise au début de cette partie.

Exercice 3 *Bac S - Amérique du nord, 1er juin 2016* ***6 points***
Partie A

1. On a $f(2e) = 2e\ln\left(\dfrac{2e}{2}\right) - 2e + 2 = 2e\ln(e) - 2e + 2 = 2$, car $\ln(e) = 1$, et donc $B(2e;2) \in \mathcal{C}_f$.
   De même, $f(2) = 2\ln\left(\dfrac{2}{2}\right) - 2 + 2 = 0$, car $\ln(1) = 0$, et donc $I(2;0) \in \mathcal{C}_f$.
   De plus, en I le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ est $f'(2)$.
   On a, pour tout $x \geqslant 2$, $f(x) = x\left(\ln(x) - \ln(2)\right) - x + 2$, soit $f = uv + w$, avec $u(x) = x$, donc $u'(x) = 1$, $v(x) = \ln(x) - \ln(2)$, donc $v'(x) = \dfrac{1}{x}$, et $w(x) = -x + 2$, donc $w'(x) = -1$.
   On a alors, $f' = u'v + uv' + w'$, soit $f'(x) = \ln(x) - \ln(2) + x\dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x) - \ln(2) = \ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$.
   Ainsi, la tangente à $\mathcal{C}_f$ en I a pour coefficient directeur $f'(2) = \ln(1) = 0$ et passe par I : c'est l'axe des abscisses.

2. a) Une équation de $\mathcal{T}$ est : $y = f'(2e)(x - 2e) + f(2e)$, avec $f'(2e) = \ln(e) = 1$ et $f(2e) = 2$, d'où $\mathcal{T} : y = x - 2e + 2$.

   On a alors $D(x_D; y_D)$ avec $y_D = 0 = x_D - 2e + 2 \iff x_D = 2e - 2$. Ainsi, $D(2e-2;0)$.

   b) L'aire de ABI, trangle rectangle en I, est $\dfrac{AI \times AB}{2} = \dfrac{2 \times (2e-2)}{2} = 2e - 2$
   et l'aire du trapèze $AIDB$ est $\dfrac{(AB + ID) \times AI}{2} = \dfrac{(2e - 2 + 2e - 2 - 2) \times 2}{2} = 4e - 6$.
   Ainsi le volume V de la cuve est tel que

$$5e \leqslant V \leqslant 5(4e-6)$$

   soit approximativement

$$17,18 \leqslant V \leqslant 24,37$$

3. a) On a $G = uv - w$ avec $u(x) = x^2/2$, donc $u'(x) = x$, $v(x) = \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) = \ln(x) - \ln(2)$, donc $v'(x) = 1/x$, et $w(x) = x^2/4$, donc $w'(x) = x/2$.

On a alors, $G' = u'v + uv' - w'$, soit

$$\begin{aligned} G'(x) &= x\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} - \frac{x}{2} \\ &= x\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \\ &= g(x) \end{aligned}$$

ce qui montre que G est bien une primitive de g.

b) On en déduit qu'une primitive de f définie par $f(x) = g(x) - x + 2$ est donnée par

$$F(x) = G(x) - \frac{1}{2}x^2 + 2x$$

c) On peut alors calculer l'intégrale :

$$\begin{aligned} S &= \int_2^{2e} \Big(2 - f(x)\Big)\,dx \\ &= \Big[2x - F(x)\Big]_2^{2e} \\ &= \Big[-G(x) + \frac{1}{2}x^2\Big]_2^{2e} \\ &= -G(2e) + \frac{1}{2}(2e)^2 - \Big(-G(2) + \frac{1}{2}2^2\Big) \\ &= G(2) - G(2e) + 2e^2 - 2 \end{aligned}$$

avec $G(2) = 2\ln(1) - 1 = -1$, et $G(2e) = 2e^2\ln(e) - e^2 = e^2$, donc

$$S = -1 - e^2 + 2e^2 - 2 = e^2 - 3$$

et on en déduit le volume de la cuve : $V = 5S = 5(e^2 - 3) \simeq 22\,m^3$.