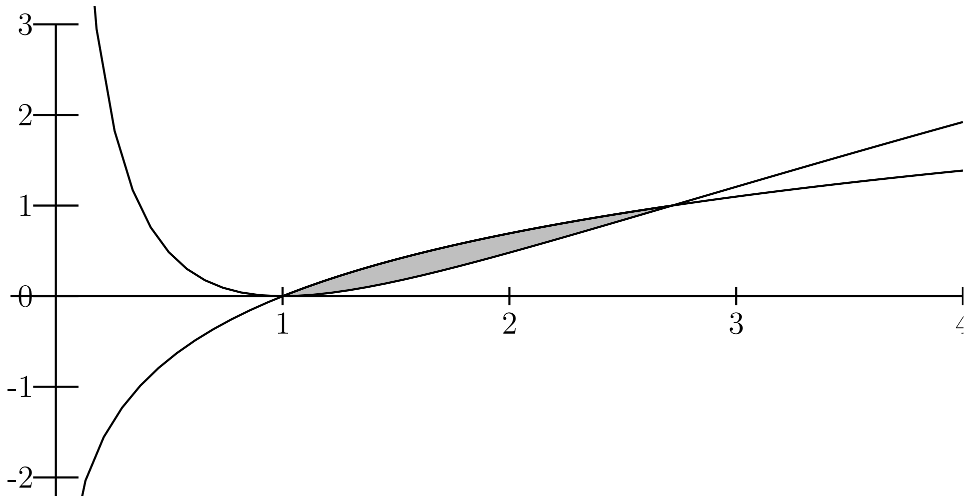
# Devoir de mathématiques

**Exercice 1** Calculer les intégrales : $I_1 = \int_{-2}^{2} 3x^5\,dx$, $I_2 = \int_0^1 \frac{3}{(2x+1)^2}\,dx$

et, en utilisant une intégration par parties, $I_3 = \int_0^1 (2x+1)e^{2x}\,dx$

**Exercice 2** Les courbes C et C' données ci-dessous représentent respectivement les fonctions $f$ et $g$ définies sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln x$ et $g(x) = (\ln x)^2$.




1. On cherche à déterminer l'aire A (en unités d'aire) de la partie grisée.
   On note $I = \int_1^e \ln x\,dx$ et $J = \int_1^e (\ln x)^2\,dx$.
   a) Vérifier que la fonction $F$ définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $F(x) = x\ln x - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien. En déduire $I$.
   b) Démontrer à l'aide d'une intégration par partie que $J = e - 2I$.
   c) Donner la valeur de A.
2. Pour $x$ appartenant à l'intervalle $[1;e]$, on note $M$ le point de la courbe C d'abscisse $x$ et $N$ le point de la courbe C' de même abscisse.
   Pour quelle valeur de $x$ la distance MN est-elle maxiale ? Calculer la valeur maximale de MN.

**Exercice 3** Pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1, on désigne par $f_n$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

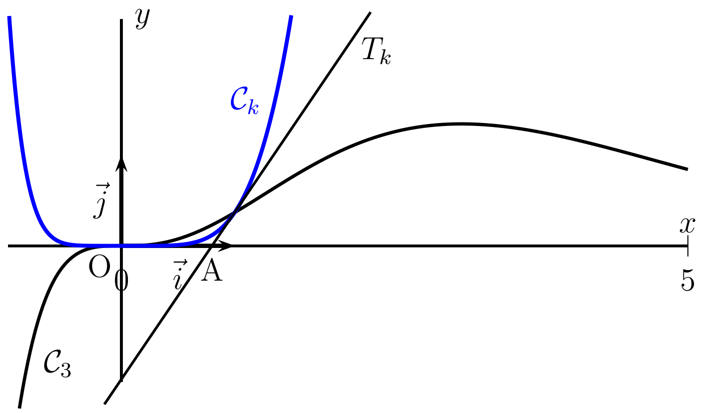
$$f_n(x) = x^n e^{-x}$$

On note $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan.

**PARTIE A**

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté une courbe $\mathcal{C}_k$ où $k$ est un entier naturel non nul, sa tangente $T_k$ au point d'abscisse 1 et la courbe $\mathcal{C}_3$.

La droite $T_k$ coupe l'axe des abscisses au point A de coordonnées $\left(\frac{4}{5}\ ;\ 0\right)$.



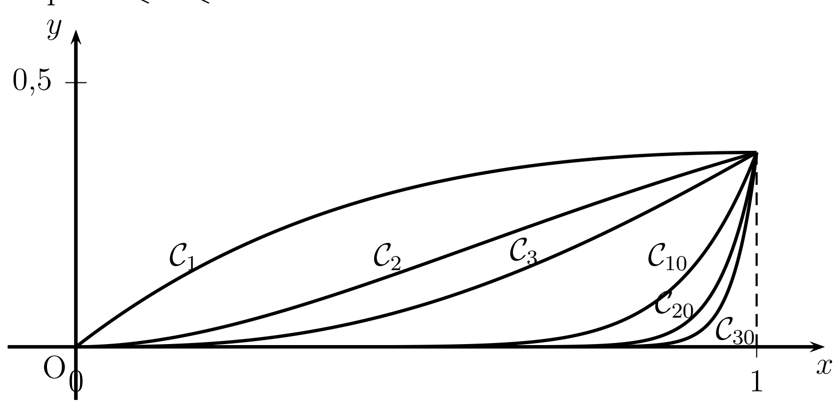

1. a) Étudier les variations de la fonction $f_1$ et dresser le tableau de variations de $f_1$.
   b) À l'aide du graphique, justifier que $k$ est un entier supérieur ou égal à 2.
2. a) Démontrer que pour $n \geqslant 1$, toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ passent par le point O et un autre point dont on donnera les coordonnées.
   b) Vérifier que pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2, et pour tout réel $x$,
   $$f_n'(x) = x^{n-1}(n-x)e^{-x}.$$
3. Sur le graphique, la fonction $f_3$ semble admettre un maximum atteint pour $x = 3$.
   Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.
4. a) Démontrer que la droite $T_k$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\dfrac{k-2}{k-1}\ ;\ 0\right)$.
   b) En déduire, à l'aide des données de l'énoncé, la valeur de l'entier $k$.

**PARTIE B**

On désigne par $(I_n)$ la suite définie pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 1 par

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$$

1. Calculer $I_1$.
2. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les portions des courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_{10}, \mathcal{C}_{20}, \mathcal{C}_{30}$ comprises dans la bande définie par $0 \leqslant x \leqslant 1$.




   a) Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite $(I_n)$ en décrivant sa démarche.
   b) Démontrer cette conjecture.
   c) En déduire que la suite $(I_n)$ est convergente.
   d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} (I_n)$.