# Corrigé du devoir de mathématiques

**Exercice** 1

$$I_1=\int_{-2}^{2}3x^5\,dx=\left[\frac{3}{6}x^6\right]_{-2}^{2}=\frac{1}{2}\left(2^6-(-2)^6\right)=0$$

$$I_2=\int_0^1\frac{3}{(2x+1)^2}\,dx=\left[-\frac{3}{2}\times\frac{1}{2x+1}\right]_0^1=-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}-1\right)=1$$

On intégre par parties en posant $u=2x+1$ donc $u'=2$, et $v'=e^{2x}$ donc $v=\frac{1}{2}e^{2x}$, et alors

$$\begin{aligned}I_3&=\int_0^1(2x+1)e^{2x}\,dx\\&=\left[(2x+1)\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1-\int_0^1 2\times\frac{1}{2}e^{2x}\,dx\\&=\frac{3}{2}e^2-\frac{1}{2}e^0-\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1\\&=\frac{3}{2}e^2-\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}\right)=e^2\end{aligned}$$

**Exercice** 2 *Bac juin 2008*

1. a) On dérive : $F=uv-u$ avec $u(x)=x$ donc $u'(x)=1$ et $v(x)=\ln x$ donc $v'(x)=\dfrac{1}{x}$,
   et alors, $F'=u'v-uv'-u'$,
   soit $F'(x)=\ln x-x\times\dfrac{1}{x}-1=\ln x=f(x)$
   ce qui montre que $F$ est bien une primtive de $f$.

   On en déduit
   $$\begin{aligned}I&=\int_1^e\ln x\,dx=\Big[F(x)\Big]_1^e=F(e)-F(1)\\&=(e\ln e-e)-(1\ln 1-1)=1\end{aligned}$$

   b) On pose $u=\ln x$ donc $u'=\dfrac{1}{x}$ et $v'=\ln x$ donc $v=x\ln x-x$ et et alors, en intégrant par parties,
   $$\begin{aligned}J&=\Big[\ln x\,(x\ln x-x)\Big]_1^e-\int_1^e\frac{1}{x}\,(x\ln x-x)\\&=0-\int_1^e(\ln x-1)\ dx\\&=-\int_1^e\ln x\,dx+\int_1^e 1dx\\&=-I+e-1=e-2I\end{aligned}$$
   car $I=1$.

   c) On en déduit la valeur de A :
   $$\begin{aligned}A&=\int_1^e\left(f(x)-g(x)\right)\ dx\\&=\int_1^e f(x)\,dx-\int_1^e g(x)\,dx\\&=I-J=1-(e-2I)\\&=1-(e-2)=3-e\end{aligned}$$

2. Pour $x \in [1; e]$, on a

$$\begin{aligned} MN &= d(x) = f(x) - g(x) \\ &= \ln x - (\ln x)^2 \end{aligned}$$

Pour trouver le maximum de cette fonction, il suffit de connaître ses variations.
On a

$$d'(x) = \frac{1}{x} - 2\frac{1}{x}\ln x = \frac{1}{x}(1 - 2\ln x)$$

avec $1 - 2\ln x > 0 \iff \ln x < 1/2 \iff x < e^{1/2} = \sqrt{e}$ et donc

| $x$ | $1$ | | $\sqrt{e}$ | | $e$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $1/x$ | | $+$ | $\vert$ | $+$ | |
| $1 - 2\ln x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $d'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $d$ | | $\nearrow$ | $d\left(\sqrt{e}\right)$ | $\searrow$ | |

La distance est donc maximale en $x = \sqrt{e}$ et cette distance maximale est

$$d\left(\sqrt{e}\right) = \ln\sqrt{e} - \left(\ln\sqrt{e}\right)^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

**Exercice** 3 *Bac général, série S, 2011*
**Partie A**

1. a. $f_1$ est le produit des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^{-x}$ qui sont dérivables sur $\mathbb{R}$. $f_1$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $x$ réel, $f_1'(x) = e^{-x}(1 - x)$.

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $e^{-x}$ | | $+$ | $\vert$ | $+$ | |
| $1 - x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_1'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_1$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{e}$ | $\searrow$ | $0$ |

   b. D'après le graphique, on ne peut pas avoir $k = 1$, car $\mathcal{C}_k$ n'est pas en accord avec le tableau de variation de $f_1$.
   Comme $k$ est un entier naturel non nul, on doit nécessaireent avoir $k \geqslant 2$.

2. a. Pour $n \geqslant 1$, $f_n(0) = 0^n e^{-0} = 0$, donc le point $O$ appartient à toutes les courbes $\mathcal{C}_n$.
   Soit de plus $I(x; y) \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, alors $y = f_1(x) = x^{-x}$ et $y = f_2(x) = x^2 e^{-x}$.
   On doit donc avoir, $y = xe^{-x} = x^2 e^{-x} \iff xe^{-x}(1 - x) = 0 \iff x(1 - x) = 0$ car $e^{-x} \neq 0$ pour tout $x$ réel, et donc, $x = 0$ ou $x = 1$.
   $x = 0$ correspond au point $O$, tandis que pour $x = 1$, $y = f_1(x) = e^{-1} = \frac{1}{e}$.
   On vérifie alors que, pour tout entier $n$, $f_n(1) = 1^n e^{-1} = \frac{1}{e}$, et donc que pour tout entier $n$, $I\left(1; \frac{1}{e}\right) \in \mathcal{C}_n$

   b. $f_n$ est le produit de la fonction polynôme $x \mapsto x^n$ et de l'exponentielle $x \mapsto e^{-x}$ qui sont dérivables sur $\mathbb{R}$. $f_n$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, avec,
   $f_n'(x) = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x} = x^{n-1}e^{-x}(n - x)$.

3. D'après ce qui précède, $f_3'(x) = x^2(3 - x)e^{-x}$, et on a le tableau de variation suivant.
   On en déduit en particulier que $f_3$ atteint un maximum en $x = 3$.

| $x$ | $-\infty$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_3'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_3$ | | $\nearrow$ | $\left(\frac{3}{e}\right)^3$ | $\searrow$ | |

4. a. La droite $T_k$ est la tangente à $\mathcal{C}_k$ en $x = 1/$ $T_k$ a pour équation :
   $y = f_k'(1)(x - 1) + f_k(1) = (k - 1)e^{-1}(x - 1) + 1^k e^{-1} = \frac{k - 1}{e}(x - 1) + \frac{1}{e}$.

$T_k$ coupe l'axe des abscisses pour $y = 0$, soit $\dfrac{k-1}{e}(x-1) + \dfrac{1}{e} = 0 \iff x = \dfrac{k-2}{k-1}$, d'où les coordonnées du point d'intersection recherché $\left(\dfrac{k-2}{k-1}; 0\right)$.

b. D'après l'énoncé, ce point d'intersection est $A\left(\dfrac{4}{5}; 0\right)$, donc, $\dfrac{k-2}{k-1} = \dfrac{4}{5} \iff k = 6$.

**Partie B**

1. En intégrant par parties, $I_1 = \displaystyle\int_0^1 xe^{-x}\,dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx = -e^{-1} + \left[-e^{-x}\right]_0^1 = -\dfrac{2}{e} + 1$
2. a. $I_n$ est l'aire comprise entre la courbe $\mathcal{C}_n$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.
   Graphiquement ces aires sont de plus en plus petites pour les courbes $\mathcal{C}_1$ à $\mathcal{C}_{30}$.
   On peut donc conjecturer que la suite $(I_n)$ est décroissante.

   b. $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^1 x^{n+1}e^{-x}\,dx - \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx = \int_0^1 \left(x^{n+1}e^{-x} - x^n e^{-x}\right)\,dx = \int_0^1 x^n\,(x-1)\,e^{-x}\,dx$

   or, pour tout $x \in [0;1]$, $x-1 \leqslant 0$, $x^n \geqslant 0$, et $e^{-x} \geqslant 0$, d'où, $x^n\,(x-1)\,e^{-x} \leqslant 0$, et donc, $\displaystyle\int_0^1 x^n\,(x-1)\,e^{-x}\,dx \leqslant 0$, c'est-à-dire $I_{n+1} - I_n \leqslant 0 \iff I_{n+1} \leqslant I_n$ : la suite $(I_n)$ est décroissante.

   c. Pour $x \in [0;1]$, $x^n e^{-x} \geqslant 0$, d'où, $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x}\,dx \geqslant 0$.
   Ainsi, $(I_n)$ est une suite décroissante et minorée par 0 : $(I_n)$ est donc convergente.

   d. Comme, pour tout $x \in [0;1]$, $0 < e^{-x} \leqslant 1$, et $x^n \geqslant 0$,
   $0 \leqslant x^n e^{-x} \leqslant x^n$ d'où, $\displaystyle\int_0^1 0\,dx \leqslant \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx \leqslant \int_0^1 x^n\,dx$, soit donc, $0 \leqslant I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n\,dx$.
   Or, $\displaystyle\int_0^1 x^n\,dx = \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{n+1}$, et ainsi, pour tout entier $n$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, on en déduit, d'après le théorème des gendarmes, que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.