Devoir de mathématiques

Exercice 1 Dans l'espace muni du repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ on considère le plan P d'équation $x + y + z - 3 = 0$ ainsi que le point $M(2; -3; 1)$.

a) Donner une représentation paramétrique de la droite D passant par M et orthogonale à P.

b) Déterminer les coordonnées du point H intersection de D et P.

c) En déduire la distance du point M au plan P.

Exercice 2
L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
Soit $(\mathcal{P})$ le plan d'équation : $3x + y - z - 1 = 0$ et $(\mathcal{D})$ la droite dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x &= -t+1 \\ y &= 2t \\ z &= -t+2 \end{cases} \quad \text{où } t \text{ désigne un nombre réel.}$$

Soit $(\mathcal{Q})$ le plan passant par le point $C(1; 3; 2)$ et orthogonal à la droite $(\mathcal{D})$.

a) Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{Q})$.

b) Calculer les coordonnées du point I, point d'intersection du plan $(\mathcal{Q})$ et de la droite $(\mathcal{D})$.

Exercice 3

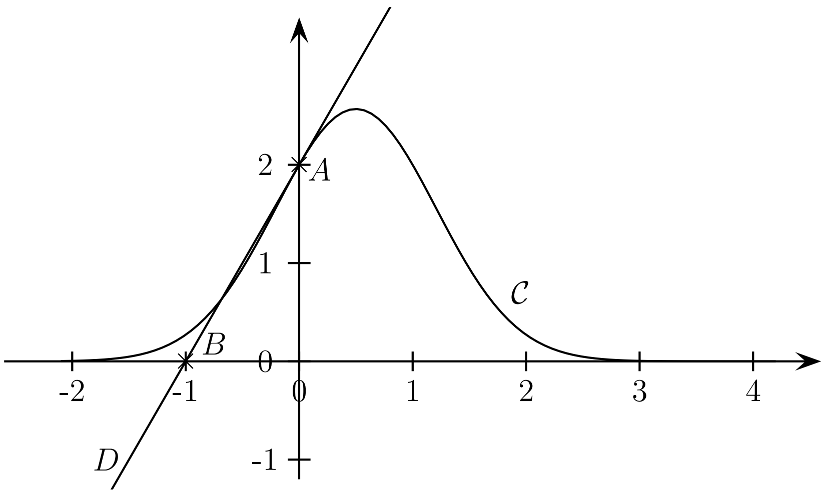
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $g(x) = (1-x)e^x + 1$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$. Préciser les éventuelles asymptotes de $\mathcal{C}$.
2. Dresser le tableau de variation de g.
3. Démontrer qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$.

Exercice 4 La figure donne la représentation graphique $\mathcal{C}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ae^{-x^2+bx}$$

où a et b sont des réels à déterminer.
On sait que la courbe passe par le points $A(0; 2)$. De plus, la tangente à $\mathcal{C}$ au point A est la droite D, droite qui passe aussi par le point $B(-1; 0)$.



1. Déterminer les valeurs des paramètres a et b.
2. Déterminer les coordonnées du sommet de $\mathcal{C}$.