Corrigé du devoir de mathématiques

Exercice 1

a) $\vec{n}(1;1;1)$ est un vecteur normal de P, la droite D passant par M et orthogonale à P admet donc comme représentatation paramétrique : $\begin{cases} x &= 2+t \\ y &= -3+t \\ z &= 1+t \end{cases}$

b) Comme $H \in D$, il existe un réel t tel que H ait pour coordonnées $\begin{cases} x &= 2+t \\ y &= -3+t \\ z &= 1+t \end{cases}$

Comme de plus $H \in P$, ses coordonnées vérifient l'équation de P donc $x+y+z-3 = 2+t-3+t+1+t-3 = 0$, soit $3t-3=0$ et donc $t=1$.

On a ainsi $H(3;-2;2)$.

c) La distance du point M au plan P est HM. Comme $\overrightarrow{HM}(-1;-1;-1)$, on a donc $HM = \sqrt{3}$.

Exercice 2 **D'après Bac S, septembre 2010** 4 points

a) Un vecteur normal au plan $(\mathcal{Q})$ est un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$; d'après la représentation paramétrique les coordonnées d'un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$ sont $(-1\ ;\ 2\ ;\ -1)$.

Une équation du plan $(\mathcal{Q})$ est donc :

$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\mathcal{Q}) \iff -x+2y-z+d=0$.

Or C$(1\,;\,3\,;\,2) \in (\mathcal{Q}) \iff -1+2\times 3-2+d=0 \iff 3+d=0 \iff d=-3$.

Conclusion : $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\mathcal{Q}) \iff -x+2y-z-3=0$.

b) Soit $M(-t+1\ ;\ 2t\ ;\ -t+2)$ un point de $(\mathcal{D})$.

$M \in (\mathcal{Q}) \iff -(-t+1)+2\times 2t-(-t+2)-3=0 \iff t-1+4t+t-2-3=0 \iff 6t-6=0 \iff t=1$.

Donc le point commun I à $(\mathcal{Q})$ et à la droite $(\mathcal{D})$ a pour coordonnées $(-1+1\ ;\ 2\times 1\ ;\ -1+2) = (0\ ;\ 2\ ;\ 1)$.

Exercice 3 g définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $g(x) = (1-x)e^x + 1$.

1. **En** $-\infty$ **:** $g(x) = e^x - xe^x + 1$.

   $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et, par croissance comparée en l'infini de l'exponentielle et des polynômes, $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$, et ainsi, par addition des limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$.

   On en déduit que la droite d'équation $y=1$ est une asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

   En $+\infty$ **:** $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-x) = -\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, d'où, par produit des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$.

2. $g = uv+1$, avec $\begin{cases} u(x) = 1-x \\ v(x) = e^x \end{cases}$ et donc, $\begin{cases} u'(x) = -1 \\ v'(x) = e^x \end{cases}$

   Ainsi, $g' = u'v + uv'$, soit $g'(x) = -e^x + (1-x)e^x = -xe^x$.

   On a alors,

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	
e^x			$+$		
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

3. Pour tout $x \leqslant 0$, $g(x) \geqslant 1 > 0$, et donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet aucune solution.

   Sur $[0;+\infty[$, g est continue (et même dérivable), strictement décroissante, et telle que $g(0) = 2 > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

   Ainsi, il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$, avec de plus $\alpha > 0$.

Exercice 4 D'après l'énoncé, on sait que $A(0;2) \in \mathcal{C} \iff f(0) = ae^{-0^2+b\times 0} = a = 2$. La droite D a pour coefficient directeur $m = 2 = f'(0)$.
Or, $f'(x) = 2(-2x+b)e^{-x^2+bx}$ et donc $f'(0) = 2b = 2 \iff b = 1$.
Ainsi, on trouvé que $f(x) = 2e^{-x^2+x}$.

Le sommet se trouve à l'ascisse x telle que $f'(x) = 0 \iff 2(-2x+1)e^{-x^2+2x} = 0$. Comme pour tout réel x, $e^x > 0$, on a donc nécessairement $-2x+1 = 0 \iff x = 1/2$.
L'ordonnée de ce sommet est alors $f(1/2) = 2e^{-(1/2)^2+1/2} = 2e^{1/4}$ et le sommet est $S\left(1/2; 2e^{1/4}\right)$.