Devoir de mathématiques

Exercice 1 On considère l'équation différentielle $(E) : y' + y = e^{-x}$.

1. Montrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).
2. On considère l'équation différentielle $(E') : y' + y = 0$. Résoudre l'équation différentielle (E').
3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

Exercice 2 On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur l'intervalle $]0; +\infty[$ vérifiant l'équation différentielle

$$(E) : \quad xy'(x) - (2x+1)y(x) = 8x^2$$

1. Démontrer qu'une fonction g est solution de $(E') : y' = 2y + 8$ si et seulement si la fonction f définie par $f(x) = xg(x)$ est soluton de (E).
2. Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E).

Exercice 3 La température de refroidissement d'un objet fabriqué industriellement est une fonction f du temps t.
f est définie sur l'ensemble des nombres réels positifs et vérifie l'équation différentielle :

$$y'(t) + \frac{1}{2}y(t) = 10$$

La température est exprimée en degrés Celsius (°C) et le temps t en heures.

1. Déterminer $f(t)$ pour $t \geqslant 0$, sachant que pour $t = 0$, la température de l'objet est 220 °C.
2. Pour la suite, on prendra comme fonction f, la fonction suivante définie sur $\mathbb{R}^+$ par

   $$f(t) = 200e^{-\frac{t}{2}} + 20$$

   On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

   a) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$.

   b) Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.
   En déduire l'existence d'une asymptote $\mathcal{D}$ à al courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

   c) Représenter graphiquement $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$.
3. Déterminer le moment où la température de l'objet est 50 °C.
   Donner une valeur approchée de ce moment en heures et minutes.