Corrigé du devoir de mathématiques

Exercice 1 *D'après Bac S, métropole, 22 juin 2010*

On considère l'équation différentielle $(E) : y' + y = e^{-x}$.

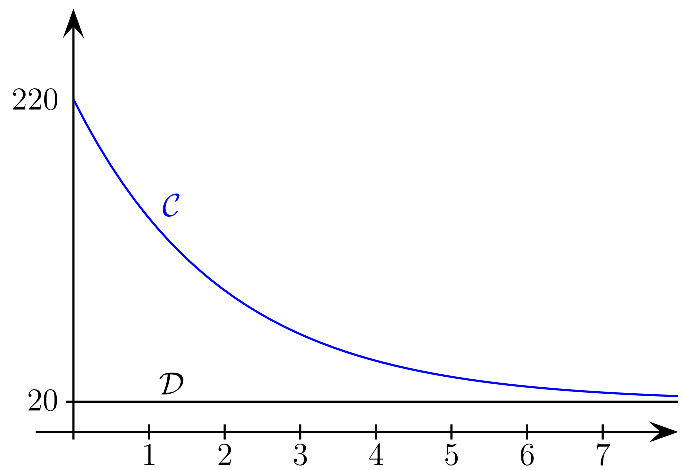
1. $u'(x) = e^{-x} + x\left(-e^{-x}\right) = e^{-x} - xe^{x}$ et donc
$$u'(x) + u(x) = e^{-x} - xe^{x} + xe^{-x} = e^{-x}$$
ce qui montre que u est bien solution de (E).
2. Les solutions de $(E') : y' + y = 0 \iff y' = -y$ sont les fonctions définies par $y_0(x) = ke^{-x}$, pour tout réel k.
3. Les solutions de l'équation différentielle (E) sont alors $y = y_0 + u$, soit, pour tout réel k, $y(x) = ke^{-x} + xe^{-x} = (x+k)e^{-x}$.
4. g est une solution, donc g s'écrit sous la forme $y(x) = ke^{-x} + xe^{-x} = (x+k)e^{-x}$.
De plus, $g(0) = 2 \iff k = 2$, d'où $g(x) = (x+2)e^{-x}$.

Exercice 2 *D'après Bac S, métropole, septembre 2008*

1. Soit f une solution de (E), c'est-à-dire $xf'(x) - (2x+1)f(x) = 8x^2$ et $f(x) = xg(x)$.
On a alors $f'(x) = g(x) + xg'(x)$ et alors
$$\begin{aligned}(E) \quad &\iff \quad x\Big(g(x) + xg'(x)\Big) - (2x+1)\Big(xg(x)\Big) = 8x^2 \\ &\iff \quad -2x^2g(x) + x^2g'(x) = 8x^2\end{aligned}$$
Comme on est sur $]0;+\infty[$ on peut peut diviser par $x^2 \neq 0$, et on obtient alors que g est vérifie $-2g(x) + g'(x) = 8$ et ainsi que g est solution de l'équation $y' = 2y + 8$.
2. On résout alors (E') : ses solutions sont les fonctions $g(x) = ke^{2x} - 4$, pour tout réel k.
On en déduit les solutions de (E) qui sont donc les solutions f telles que
$$f(x) = xg(x) = x\left(ke^{2x} - 4\right)$$

Exercice 3 *D'après Bac S, Antilles-Guyane, 23 juin 2009*

1. Les solutions de l'équation différentielle : sont $f(t) = ke^{-\frac{1}{2}t} + 20$, pour tout réel k.
On sait de plus que $f(0) = 220$, soit $k + 20 = 220 \iff k = 200$.
Ainsi, la température de l'objet est $f(t) = 200e^{-\frac{t}{2}} + 20$.
2. a) Comme $(e^u)' = u'e^u$, on a $f'(t) = 200\left(-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\right) = -100e^{-\frac{t}{2}}$.
Comme $e^x > 0$ pour tout réel x, on trouve donc que $f'(t) < 0$ et donc que f est strictement décroissante.
b) On a $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{1}{2}t} = 0$ et donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 20$, et donc la droite d'équation $y = 20$ est asymptote en $+\infty$ à $\mathcal{C}$.
c)



3. Le moment t où la température de l'objet est 50 °C est

$$\begin{aligned} & f(t) = 200e^{-\frac{t}{2}} + 20 = 50 \\ \iff\quad & e^{-\frac{t}{2}} = \frac{30}{200} = \frac{3}{20} \\ \iff\quad & -\frac{t}{2} = \ln\left(\frac{3}{20}\right) \\ \iff\quad & t = -2\ln\left(\frac{3}{20}\right) \simeq 3,8 \end{aligned}$$

soit environ 3 heures et 48 minutes.