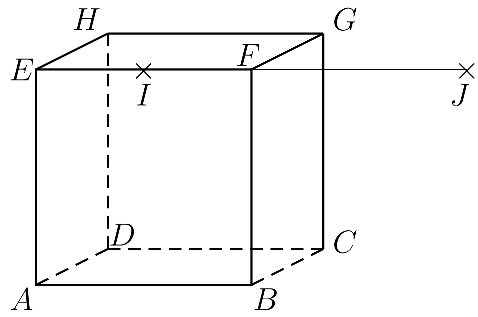
Devoir de mathématiques



Exercice 1 On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1, I est le milieu de $[EF]$ et J le symétrique de E par rapport à F.

Dans tous les exercices, l'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. a) Par lecture graphique, donner les coordonnées de I et J.
   b) En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DJ}$, $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$.
   c) Montrer que $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI).
   d) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (BGI) est $2x - y + z - 2 = 0$.
2. On note d la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).
   a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.
   b) On considère le point L de coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right)$.
   Montrer que L est le point d'intersection de la droite d et du plan (BGI).
3. On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.
   a) Calculer le volume de la pyramide $FBGI$.
   b) En déduire l'aire du triangle BGI.

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = (3 - x)e^x + 1$.

1. Calculer les fonctions dérivée f' et dérivée seconde f'' de f.
   On montrera que $f'(x) = (2 - x)e^x$ et que $f''(x) = (1 - x)e^x$.
2. Étudier les variations de f.
3. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[3; 4]$.
4. a) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe représentative de f au point d'abscisse 3.
   b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de T et de l'axe des abscisses.
   c) Étudier la convexité de f.
   d) Déduire de ce qui précède que $3 < \alpha < 3 + \frac{1}{e^3} < 3,05$.