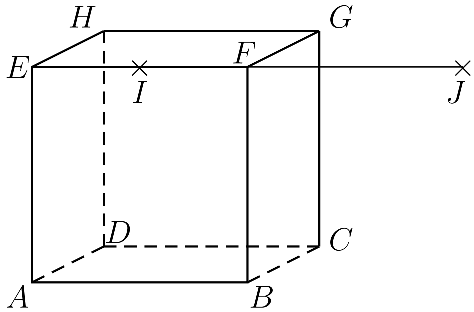
Correction du devoir de mathématiques



Exercice 1

1. a) Par lecture graphique, $I\left(\frac{1}{2};0;1\right)$ et $J\,(2;0;1)$.

   b) On en déduit $\overrightarrow{DJ}\,(2;-1;1)$, $\overrightarrow{BI}\,\left(-\frac{1}{2};0;1\right)$ et $\overrightarrow{BG}\,(0;1;1)$.

   c) $\overrightarrow{DJ}$ est normal au plan (BGI) si et seulement si il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan, par exemple $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BI}$, ce qui est bien le cas car :

   $$\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BG} = 2\times 0+(-1)\times 1+1\times 1 = 0$$

   et

   $$\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BI} = 2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+(-1)\times 0+1\times 1 = 0$$

   d) Un vecteur normal au plan (BGI) est donc $\overrightarrow{DJ}(2;-1;1)$ et donc ce plan a une équation cartésienne de la forme $2x-y+z+d=0$.
   De plus $B(1;0;0)$ appartient à ce plan, d'où $2\times 1-0+0+d=0 \iff d=-2$.
   Une équation cartésienne du plan (BGI) est donc bien $2x-y+z-2=0$.

2. On note d la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).

   a) Comme la droite d est orthogonale au plan (BGI) et que $\overrightarrow{DJ}$ est aussi orthogonal à ce plan, on en déduit que $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur directeur de d. On a donc une reprsentation paramétrique, avec $F(1;0;1)$:

   $$d:\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+2t \\ y &=& -t \\ z &=& 1+t \end{array}\right.,t\in\mathbb{R}$$

   b) Comme d est orthogonal à (BGI), leur intersection est donc un point. Il reste donc simplement à vérifier que cette intersection est le point L, c'est-à-dire que $L\in d$ et $L\in(BGI)$.
   Avec l'équation cartésienne de (BGI), $2\times\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{5}{6}-2=\dfrac{8}{6}+\dfrac{4}{6}-\dfrac{12}{6}=0$ et donc $L\in(BGI)$.
   Avec la représentation praréṁtrique de d, on cherche $t\in\mathbb{R}$ tel que

   $$d:\left\{\begin{array}{rcl} \frac{2}{3} &=& 1+2t \\ \frac{1}{6} &=& -t \\ \frac{5}{6} &=& 1+t \end{array}\right. \iff t=-\frac{1}{6}$$

   et donc $L\in d$.
   Finalement L est le point d'intersection de d et (BGI).

3. a) D'après tout ce qui précède, une hauteur est FL associée à la base BGI.
   On peut aussi considérer la base FGI associée à la hauteur FB, qui donne le volume

   $$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}FI\times FG\right)\times FB \\ &= \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 1\right)\times 1=\frac{1}{12} \end{aligned}$$

   b) En utilisant la hauteur FL et la base BGI d'aire $\mathcal{B}$, on a

   $$V=\frac{1}{3}\times\mathcal{B}\times FL$$

où

$$FL = \sqrt{\left(\frac{2}{3}-1\right)^2 + \left(\frac{1}{6}-0\right)^2 + \left(\frac{5}{6}-1\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

On en déduit que

$$V = \frac{1}{12} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times \frac{1}{\sqrt{6}}$$

d'où l'aire du triangle BGI.

$$\mathcal{B} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = (3-x)e^x + 1$.

1. On a $f = uv + 1$, avec $u(x) = 3 - x$ donc $u'(x) = -1$, et $v(x) = e^x$ donc $v'(x) = e^x$.
   On trouve donc $f' = u'v + uv' + 0$, soit $f'(x) = -e^x + (3-x)e^x = (2-x)e^x$.

   On recommence : $f' = uv$, avec $u(x) = 2 - x$ donc $u'(x) = -1$, et $v(x) = e^x$ donc $v'(x) = e^x$.
   On trouve donc $(f')' = f'' = u'v + uv'$, soit $f''(x) = -e^x + (2-x)e^x = (1-x)e^x$.
2. Les variations de f sont données par le signe de sa dérivée f' :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$2-x$		$+$	0	$-$	
e^x		$+$	$\vert$	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	e^2+1	$\searrow$	

3. f est continue sur $\mathbb{R}$, donc aussi sur $[3;4]$ où elle est strictement décroissante, avec de plus $f(3) = 1 > 0$ et $f(4) = -e^4 + 1 < 0$.
   D'après le théorème des valeurs intermédiaires (ou plus précisément ici de la bijection), l'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution $\alpha \in [3;4]$.
4. a) $T : y = f'(3)(x-3) + f(3) = -e^3(x-3) + 1$,

   b) T coupe l'axe des abscisses à l'abscisse x telle que $y = 0 \iff -e^3(x-3)+1 = 0 \iff x = 3+e^{-3}$

   c) La convexité de f est donnée par le signe de sa dérivée seconde :

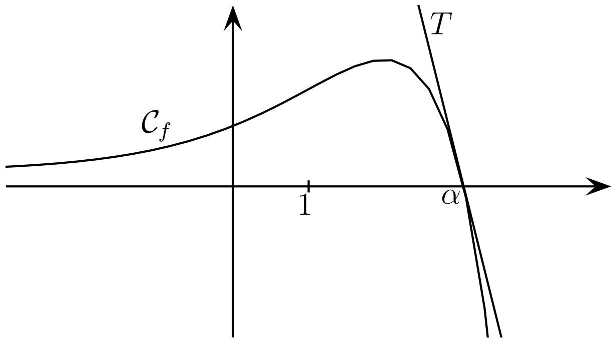
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
e^x		$+$	$\vert$	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

   Ainsi, f est convexe sur $]-\infty;1[$ et concave sur $]1;+\infty[$.

   d) On a $\alpha \in [3;4]$, or f est concave sur cet intervalle, et donc f y est au-dessous de ses tangentes. En particulier, le point $(\alpha; f(\alpha))$ de la courbe (avec $f(\alpha) = 0$) est en-dessous du point de la tangente T au point d'abscisse α :

$$0 = f(\alpha) \leqslant -e^3(\alpha - 3) + 1$$

$$\iff \quad \alpha \leqslant \frac{1}{e^3} + 3 \simeq 3,0498 < 3,05$$



T
$\mathcal{C}_f$
1
α