Devoir de mathématiques

Exercice 1 Simplifier (écrire avec une seule fraction) :

$$F(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \quad ; \quad G(x) = \frac{-2}{\dfrac{3}{x+3} - 2} - \frac{x}{x+2}$$

Exercice 2 Calculer la dérivée des fonctions (simplifier l'expression bien sûr, une seule fraction, expression factorisée ...) :

$$f(x) = \frac{5x}{x^2+3} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{e^x+2}{e^x+1}$$

Déterminer les limites de f et g en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement ces limites (asymptote ?).

Exercice 3 Dresser le tableau de variation de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $h(x) = xe^{0,1x}$.

Exercice 4 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par $f(x) = \dfrac{2+3x}{4+x}$, et la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$

On admet que cette suite est bien définie.

1. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,4]$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$.
3. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 5 Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbf{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

1. a. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.
   b. Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.
2. a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant n+3$.
   b. Démontrer que pour tout entier naturel n,
   $$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}\left(n + 3 - u_n\right).$$
   c. En déduire une validation de la conjecture précédente.
3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbf{N}$ par $v_n = u_n - n$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$.
   b. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + n$.
   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).