Devoir de mathématiques

Exercice 1 A et B sont deux événements tels que $P(B) = 0,5$, $P_B(A) = 0,4$ et $P(A \cup B) = 0,7$.
Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 2 On étudie une maladie dans la population d'un pays. On a constaté que le taux, en nanogrammes par millilitre ($ng.mL^{-1}$), d'une substance Gamma présente dans le sang est plus élevé chez les personnes atteintes de cette maladie que chez les personnes qui n'ont sont pas atteintes.
Pour dépister chez une personne cette maladie, on effectue une prise de sang.

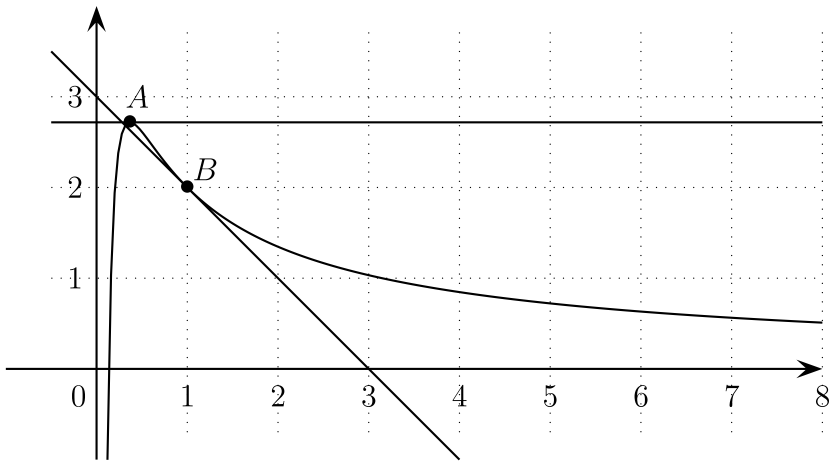
On considère que le dépistage est positif si le taux de la substance Gamma est supérieur ou égal à $45 ng.mL^{-1}$.
Une personne étant choisie au hasard dans la population, on note
- M l'événement "le patient est atteint par la maladie étudiée"
- D l'événement "le patient a un dépistage positif".

On admet que :
- 82% des personnes atteintes par la maladie étudiée ont un dépistage positif
- 73% des personnes non atteintes par cette maladie ont un dépistage négatif
- On sait de plus que 10% de la population étudiée est atteinte par cette maladie.

1. Représenter cette situation par un arbre pondéré.
2. Démontrer que la probabilité qu'un patient ait un dépistage positif est de 0,325.
3. Calculer $P_{\overline{D}}(M)$, puis en donner une valeur approchée à 0,001 près. Interpréter ce résultat.
4. Un patient a un dépistage positif. Le médecin le rassure en lui indiquant qu'il n'a qu'une chance sur quatre d'avoir contracté la maladie. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 3 Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :
- la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $]0; +\infty[$;
- la tangente T_A à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A de coordonnées $\left(\dfrac{1}{e}; e\right)$;
- la tangente T_B à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B de coordonnées $(1; 2)$.

La droite T_A est parallèle à l'axe des abcisses. La droite T_B coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3; 0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0; 3)$.



Partie I

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f'\left(\dfrac{1}{e}\right)$ et de $f'(1)$.
2. En déduire une équation de la droite T_B.

Partie II

On suppose maintenant que la fonction f est définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2+\ln(x)}{x}$$

1. Par le calcul, montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par les points A et B et qu'elle coupe l'axe des abscisses en un point unique que l'on précisera.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, et la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que, pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-1-\ln(x)}{x^2}$.
4. Dresser le tableau de variation de f sur $]0;+\infty[$.
5. On note f'' la fonction dérivée seconde de f.
   Montrer que, pour tout $x > 0$, $f''(x) = \dfrac{1+2\ln(x)}{x^3}$.
6. Déterminer le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.