Corrigé du devoir de mathématiques

Exercice 1 Les événements A et B sont indépendants si et seulement si $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$. Il faut donc ici déterminer $P(A\cap B)$ et $P(A)$.

On a $P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{P(A\cap B)}{0,5}=0,4$ d'où $P(A\cap B)=0,5\times 0,4=0,2$.

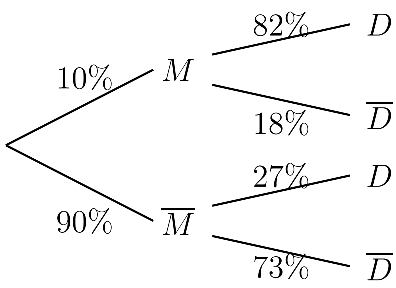
De plus

$$\begin{aligned}
&P(A\cup B) &&=P(A)+p(B)-P(A\cap B)\\
\iff\ &P(A) &&=P(A\cup B)-P(B)+P(A\cap B)\\
& &&=0,7-0,5+0,2\\
& &&=0,4
\end{aligned}$$

On calcule alors $P(A)\times P(B)=0,4\times 0,5=0,2=P(A\cap B)$, ce qui montre donc que ces deux événements sont indépendants.

Exercice 2

1.



2. La probabilité qu'un patient ait un dépistage positif est

$$P(D)=10\%\times 82\%+90\%\times 27\%=0,325$$

3.

$$P_{\overline{D}}(M)=\frac{P(M\cap\overline{D})}{P(\overline{D})}=\frac{10\times 18\%}{1-0,325}\simeq 0,027$$

La probabilité qu'un patient soit être malade sachant que son test est négatif est d'environ 2,7%, ou encore, un patient qui a un test négatif a (quand même) 2,7% de chance d'être malade.

4. On recherche la probabilité d'être malade sachant que le test est positif, soit

$$P_D(M)=\frac{P(M\cap D)}{P(D)}=\frac{10\%\times 82\%}{0,325}\simeq 0,25=25\%$$

Ce résultat confirme les propos du médecin.

Exercice 3

Partie I

1. $f'\left(\dfrac{1}{e}\right)$ est le coefficient directeur de la tangente T_A à la courbe au point A d'abscisse $\dfrac{1}{e}$. Cette tangente semble être horizontale, d'où $f'\left(\dfrac{1}{e}\right)=0$.

   De même pour $f'(1)$ qui est le coefficient directeur de la tangente T_B en B, soit, graphiquement, environ $f'(1)=-1$.

2. L'ordonnée à l'origine de T_B est environ 3, et on en déduit donc l'équation $T_B: y=-x+3$.

Partie II

1. On a $f(1) = \dfrac{2+\ln(1)}{1} = 2$ d'où $B(1;2) \in \mathcal{C}_f$.
   De même, on a
$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2+\ln\left(\dfrac{1}{e}\right)}{\dfrac{1}{e}} = e \times (2 - \ln(e)) = e \times (2-1) = e$$
   ce qui montre que $A\left(\dfrac{1}{e}; e\right) \in \mathcal{C}_f$.

   De plus, si $M(x;y)$ est à l'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de l'axe des abscisses, alors
$$f(x) = 0 \iff \frac{2+\ln(x)}{x} = 0 \iff \ln(x) = -2 \iff x = e^{-2}$$
   et il y a donc ainsi un unique point d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses : $M\left(e^{-2};0\right)$.
2. On a $\lim\limits_{x\to 0} 2+\ln(x) = -\infty$ et donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

   On a $f(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{\ln(x)}{x}$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
3. On a $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 2+\ln(x)$ donc $u'(x) = \dfrac{1}{x}$, et $v(x) = x$ donc $v'(x) = 1$.

   On a donc $f' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, soit
$$f'(x) = \frac{\dfrac{1}{x} \times x - (2+\ln(x)) \times 1}{x^2} = \frac{-1-\ln(x)}{x^2}$$
4. On a $-1-\ln(x) > 0 \iff \ln(x) < -1 \iff x < e^{-1} = \dfrac{1}{e}$ en appliquant la fonction exponentielle qui est strictement croissante.
   On obtient donc

x	0		$1/e$		$+\infty$
$-1-\ln(x)$		$+$	0	$-$	
x		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

5. On a $f' = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = -1-\ln(x)$ donc $u'(x) = -\dfrac{1}{x}$, et $v(x) = x^2$ donc $v'(x) = 2x$.

   On a donc $f'' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, soit
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\dfrac{1}{x} \times x^2 - (-1-\ln(x)) \times 2x}{x^4} \\ &= \frac{x+2x\ln(x)}{x^4} = \frac{x\left(1+2\ln(x)\right)}{x^4} \\ &= \frac{1+2\ln(x)}{x^3} \end{aligned}$$
6. f est convexe lorsque
$$f''(x) > 0 \iff \frac{1+2\ln(x)}{x^3} > 0$$

soit, comme ici $x > 0$, donc $x^3 > 0$,

$$1 + 2\ln(x) > 0 \iff \ln(x) > -\frac{1}{2} \iff x > e^{-1/2}$$

en appliquant la fonction exponentielle qui est strictement croissante.
Ainsi f est convexe sur $\left]e^{-1/2}; +\infty\right[$.