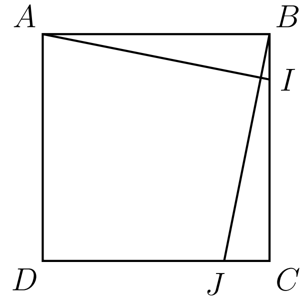
Devoir maison de mathématiques

Géométrie plane vectorielle et analytique



Exercice 1 Soit $ABCD$ un carré, et I et J les points tels que $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CD}$.
Donner dans le repère orthonormal $(D; \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$ les coordonnées de tous les points de la figure.
Démontrer alors que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont orthogonaux.

Exercice 2 Dans un RON, on considère les points $A(1;1)$, $B(-1;2)$ et $C(-3;0)$.
Donner une valeur de $\widehat{ABC}$ à $0,1$ degré près.

Exercice 3 ABC est un triangle tel que $A(3;-2)$, $B(0;-1)$ et $C(1;3)$.

a) Déterminer une équation de la médiatrice du segment $[AB]$.

b) Déterminer une équation de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

Exercice 4 Dans un RON, on considère les points $A(-3;0)$, $B(3;-1)$ et $C(1;5)$.

a) Déterminer une équation de la droite d_1 perpendiculaire à (AB) et passant par C.

b) Déterminer une équation de la droite d_2 parallèle à (AB) et passant par C.

Analyse - Asymptote oblique

Exercice 5 Démontrer que, pour tout réel $x > 0$, on a $e^x > x$.
En déduire la limite de e^x quand x tend vers $+\infty$.
En déduire alors aussi la limite de e^x lorsque x tend vers $-\infty$.

Définitions	On dit que la droite Δ d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique en $+\infty$ à $\mathcal{C}_f$, courbe représentative de la fonction f, lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} \Big(f(x) - (ax+b)\Big) = 0$. Déterminer la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et Δ signifie déterminer quelle courbe est au-dessous ou au-dessus de l'autre. La position relative est donnée par l'étude du signe de la différence $d(x) = f(x) - (ax+b)$.

Exercice 6 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par l'expression $f(x) = \dfrac{-x^2 + x + 3}{x + 2}$.
Montrer que la droite Δ d'équation $y = -x + 3$ est asymptote oblique à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f en $+\infty$.
Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et Δ.

Exercice 7 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x + 3}{x + 2}$, et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

1. Déterminer un nombre réel a tel que, pour tout réel x, $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{a}{x+2}$.
2. Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ et Δ.

4. Représenter graphiquement ces résultats.

Exercice 8

Partie I. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1. Etudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique que l'on notera α. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
3. Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie II. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Etudier les limites de f aux bornes de ses intervalles de définition.
   En déduire l'existence de deux asymptotes verticales dont on donnera les équations.
2. Calculer la dérivée de f sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ et déterminer son signe.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, $f(x) = x + 2 + \dfrac{x+2}{x^2 - 1}$.
5. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x + 2$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ et $+\infty$.
6. Etudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et Δ.
7. Déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ admettant une tangente parallèle à Δ.