Devoir de mathématiques

Exercice 1 Dans l'espace muni du repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ on considère le plan P d'équation $x+y+z-3=0$ ainsi que le point $M(2;-3;1)$.

a) Le point M est-il dans le plan P ?

b) Donner une représentation paramétrique de la droite D passant par M et orthogonale à P.

c) Déterminer les coordonnées du point H intersection de D et P.

d) En déduire la distance du point M au plan P.

Exercice 2 **Bac S, septembre 2010** 4 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Soit $(\mathcal{P})$ le plan d'équation : $3x+y-z-1=0$ et $(\mathcal{D})$ la droite dont une représentation paramétrique est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -t+1 \\ y & = & 2t \\ z & = & -t+2 \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ désigne un nombre réel.}$$

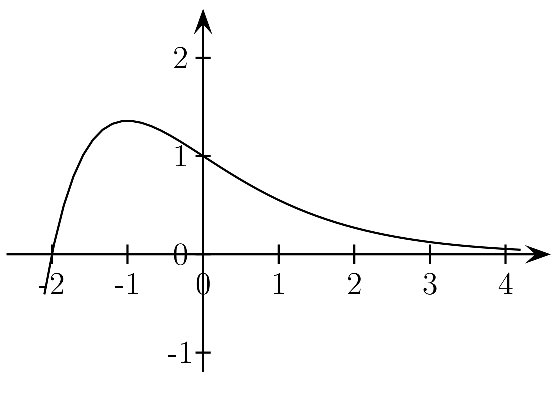
1. a) Le point C(1 ; 3 ; 2) appartient-il au plan $(\mathcal{P})$? Justifier.
   b) Démontrer que la droite $(\mathcal{D})$ est incluse dans le plan $(\mathcal{P})$.
2. Soit $(\mathcal{Q})$ le plan passant par le point C et orthogonal à la droite $(\mathcal{D})$.
   a) Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{Q})$.
   b) Calculer les coordonnées du point I, point d'intersection du plan $(\mathcal{Q})$ et de la droite $(\mathcal{D})$.
   c) Montrer que CI $= \sqrt{3}$.
3. Soit t un nombre réel et M_t le point de la droite $(\mathcal{D})$ de coordonnées $(-t+1\ ;\ 2t\ ;\ -t+2)$.
   a) Vérifier que pour tout nombre réel t, $\text{C}M_t^2 = 6t^2 - 12t + 9$.
   b) Montrer que CI est la valeur minimale de $\text{C}M_t$ lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels.

Exercice 3 La figure donne la représentation graphique $\mathcal{C}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (ax+b)e^{cx}$$

où a, b et c sont des réels à déterminer.

On sait que la courbe passe par les points $A(-2;0)$ et $B(0;1)$. De plus, au point C d'abscisse -1, la courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.



1. Déterminer les valeurs des paramètres a, b et c.
2. Montrer que l'axe des abscisses est une asymptote.

3. Déterminer les points d'intersection de la courbe avec la droite d'équation $y = x + 2$.

Exercice 4 On considère la fonction f définie sur $I = [0; +\infty[$ par l'expression $f(x) = \dfrac{10x}{e^x + 1}$.
On cherche à montrer que la fonction f admet un maximum sur I et, bien sür, à localiser ce maximum.

Partie A. Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $g(x) = (1 - x)e^x + 1$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
   Préciser les éventuelles asymptotes de $\mathcal{C}$.
2. Dresser le tableau de variation de g.
3. Démontrer qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$.
   Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B. Etude de f

1. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur I.
2. Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$.
3. En déduire que f admet sur I son maximum en α et montrer que $f(\alpha) = 10(\alpha - 1)$.
   En déduire en encadrement d'amplitude 10^{-1} du maximum de f.