Corrigé du devoir de mathématiques

Exercice 1

a) $x_M + y_M + z_M - 3 = 2 - 3 + 1 - 3 = -3 \neq 0$ donc $M \notin P$.

b) $\vec{n}(1;1;1)$ est un vecteur normal de P, la droite D passant par M et orthogonale à P admet donc comme représentatation paramétrique : $\begin{cases} x &= 2+t \\ y &= -3+t \\ z &= 1+t \end{cases}$

c) Comme $H \in D$, il existe un réel t tel que H ait pour coordonnées $\begin{cases} x &= 2+t \\ y &= -3+t \\ z &= 1+t \end{cases}$

Comme de plus $H \in P$, ses coordonnées vérifient l'équation de P donc $x+y+z-3 = 2+t-3+t+1+t-3 = 0$, soit $3t - 3 = 0$ et donc $t = 1$.

On a ainsi $H(3;-2;2)$.

d) La distance du point M au plan P est HM. Comme $\overrightarrow{HM}(-1;-1;-1)$, on a donc $HM = \sqrt{3}$.

Exercice 2 **Bac S, septembre 2010** 4 points

1. (a) C$(1\,;\,3\,;\,2) \in (\mathcal{P}) \iff 3 \times 1 + 3 - 2 - 1 = 0 \iff 3 = 0$, faux. Le point C n'appartient pas au plan $(\mathcal{P})$.

   (b) Soit M un point de $(\mathcal{D})$.
   $M \in (\mathcal{P}) \iff 3(-t+1) + 2t - (-t+2) - 1 = 0 \iff -3t + 3 + 2t + t - 2 - 1 = 0$, vrai quel que soit t.
   Tout point de $(\mathcal{D})$ est un point de $(\mathcal{P})$, donc la droite $(\mathcal{D})$ est incluse dans le plan $(\mathcal{P})$.

2. (a) Un vecteur normal au plan $(\mathcal{Q})$ est un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$; d'après la représentation paramétrique les coordonnées d'un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$ sont $(-1\ ;\ 2\ ;\ -1)$.
   Une équation du plan $(\mathcal{Q})$ est donc :
   $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\mathcal{Q}) \iff -x + 2y - z + d = 0$.
   Or C$(1\,;\,3\,;\,2) \in (\mathcal{Q}) \iff -1 + 2 \times 3 - 2 + d = 0 \iff 3 + d = 0 \iff d = -3$.
   Conclusion : $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\mathcal{Q}) \iff -x + 2y - z - 3 = 0$.

   (b) Soit $M(-t+1\ ;\ 2t\ ;\ -t+2)$ un point de $(\mathcal{D})$.
   $M \in (\mathcal{Q}) \iff -(-t+1) + 2 \times 2t - (-t+2) - 3 = 0 \iff t - 1 + 4t + t - 2 - 3 = 0 \iff 6t - 6 = 0 \iff t = 1$.
   Donc le point commun I à $(\mathcal{Q})$ et à la droite $(\mathcal{D})$ a pour coordonnées $(-1+1\ ;\ 2 \times 1\ ;\ -1+2) = (0\ ;\ 2\ ;\ 1)$.

   (c) On a $\overrightarrow{CI}\,(-1\ ;\ -1\ ;\ -1)$.
   Donc $\text{CI}^2 = \overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{CI} = 1 + 1 + 1 = 3$.
   Conclusion $\text{CI} = \sqrt{3}$.

3. Soit t un nombre réel et M_t le point de la droite $(\mathcal{D})$ de coordonnées $(-t+1\ ;\ 2t\ ;\ -t+2)$.

   (a) On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{CM_t}(-t+1-1\ ;\ 2t-3\ ;\ -t+2-2)$ soit $(-t\ ;\ 2t-3\ ;\ t)$.
   On a $\text{C}M_t^2 = \overrightarrow{CM_t} \cdot \overrightarrow{CM_t} = (-t)^2 + (2t-3)^2 + t^2 = t^2 + 4t^2 + 9 - 12t + t^2 = 6t^2 - 12t + 9$.

   (b) $\text{C}M_t^2 = 6t^2 - 12t + 9 = 6\left(t^2 - 2t + \dfrac{9}{6}\right) = 6\left[(t^2 - 2t + 1) - 1 + \dfrac{3}{2}\right] = 6\left[(t-1)^2 + \dfrac{1}{2}\right]$.
   Le minimum de ce trinôme somme de deux carrés est obtenue lorsque le premier carré est nul soit pour $t = 1$ et la valeur minimale de trinôme est égale à $\text{C}M_t^2 = 6 \times \dfrac{1}{2} = 3 \Rightarrow \text{C}M_t = \sqrt{3}$. CI est bien la valeur minimale.

Exercice 3

1. D'après l'énoncé on sait que
   — $A(-2;0) \in \mathcal{C} \iff f(-2) = (-2a+b)e^{-2c} = 0 \iff -2a + b = 0$ car $e^{-2c} \neq 0$;

— $B(0;1) \in \mathcal{C} \iff f(0) = b = 1$, donc aussi, d'après le résultat précédent, $-2a + b = 0 \iff a = \dfrac{1}{2}$.

On a donc jusqu'ici, $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}x + 1\right) e^{cx}$.

— la tangente au point d'abscisse -1 est horizontale, donc son coefficient directeur est nul, soit $f'(-1) = 0$.

f est de la forme $f = v \times v$, avec $u(x) = \dfrac{1}{2}x + 1$ donc $u'(x) = \dfrac{1}{2}$, et $v(x) = e^{cx}$ donc $v'(x) = ce^{cx}$.

On a alors la dérivée : $f' = u'v + uv'$, soit $f'(x) = \dfrac{1}{2}e^{cx} + c\left(\dfrac{1}{2}x + 1\right) e^{cx} = \dfrac{1}{2}e^{cx}\,(cx + 1 + 2c)$.

Ainsi, $f'(-1) = 0 \iff \dfrac{1}{2}e^{-c}\,(-c + 1 + 2c) = 0 \iff -c + 1 + 2c = 0$ car $e^{-c} \neq 0$, et donc $c = -1$.

En résumé, la fonction f a pour expression $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}x + 1\right) e^{-x}$.

2. Graphiquement, il semblerait que l'axe des abscisses soit une asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

   On a $f(x) = \dfrac{1}{2}xe^{-x} + e^{-x} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{\frac{e^x}{x}} + e^{-x}$.

   Or, par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, et donc, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$.

   Comme on sait aussi que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$, on a bien $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, ce qui montre bien que la droite d'équation $y = 0$, c'est-à-dire aussi l'axe des abscisses est asymptote à $\mathcal{C}$.

3. On cherche les abscisses x telles que $f(x) = x + 2 \iff \left(\dfrac{1}{2}x + 1\right) e^{-x} = 2\left(\dfrac{1}{2}x + 1\right) \iff \left(\dfrac{1}{2}x + 1\right)\left(e^{-x} - 2\right) = 0$.

   On a donc deux solutions : $\dfrac{1}{2}x + 1 = 0 \iff x = -2$ ou $e^{-x} - 2 = 0 \iff x = -\ln(2)$.

   Il y a donc deux points d'intersection, les points $D(-2; f(-2))$, soit $D\,(-2; 0)$, et $E\,(-\ln(2); f(-\ln(2))$, soit $E\,(-2; 2 - \ln(2))$.

Exercice 4 f définie sur $I = [0; +\infty[$ par l'expression $f(x) = \dfrac{10x}{e^x + 1}$.

Partie A. Fonction auxiliaire : g définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $g(x) = (1 - x)e^x + 1$.

1. **En $-\infty$:** $g(x) = e^x - xe^x + 1$.

   $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ et, par croissance comparée en l'infini de l'exponentielle et des polynômes, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$, et ainsi, par addition des limites, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = 1$.

   On en déduit que la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

   En $+\infty$: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (1 - x) = -\infty$, et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, d'où, par produit des limites, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$.

2. $g = uv + 1$, avec $\begin{cases} u(x) = 1 - x \\ v(x) = e^x \end{cases}$ et donc, $\begin{cases} u'(x) = -1 \\ v'(x) = e^x \end{cases}$

   Ainsi, $g' = u'v + uv'$, soit $g'(x) = -e^x + (1 - x)e^x = -xe^x$.

   On a alors,

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	
e^x			$+$		
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

3. Pour tout $x \leqslant 0$, $g(x) \geqslant 1 > 0$, et donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet aucune solution.

   Sur $[0; +\infty[$, g est continue (et même dérivable), strictement décroissante, et telle que $g(0) = 2 > 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires (ou de la bijection) il existe un unique réel α tel que $g(\alpha)=0$, avec de plus $\alpha>0$.
On trouve avec la calculatrice, $g(1,27)>0$ et $g(1,28)<0$. Ainsi, $1,27<\alpha<1,28$.

Partie B. Etude de f

1. On a $f=\dfrac{u}{v}$, avec $\left\{\begin{array}{l} u(x)=10x \\ v(x)=e^x+1 \end{array}\right.$ et donc, $\left\{\begin{array}{l} u'(x)=10 \\ v'(x)=e^x \end{array}\right.$. Ainsi, $f'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$,
soit, pour tout $x\geqslant 0$, $f'(x)=\dfrac{10\left(e^x+1\right)-10xe^x}{\left(e^x+1\right)^2}=10\dfrac{e^x(1-x)+1}{\left(e^x+1\right)^2}=\dfrac{10g(x)}{\left(e^x+1\right)^2}$.
Comme pour tout x, $e^x>0$, on a $e^x+1>1>0$ et donc, $\left(e^x+1\right)^2>0$, et, d'après la partie A, on a donc,

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	
$\left(e^x+1\right)^2$			$+$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	

2. En 0, on a simplement, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$.
En $+\infty$, $f(x)=10\dfrac{x}{e^x}\times\dfrac{1}{1+e^-x}$, avec $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\dfrac{e^x}{1}}=0$, par croissance comparée, et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+e^-x=1$. Ainsi, par produit et quotient de limites, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.
3. On déduit du tableau de variation précédent que f admet un maximum global en α.
De plus, on avait $g(\alpha)=0 \iff e^\alpha(1-\alpha)+1=0 \iff e^\alpha=\dfrac{1}{1-\alpha}$.
Alors, $f(\alpha)=\dfrac{10\alpha}{e^\alpha+1}=\dfrac{10\alpha}{\dfrac{1}{\alpha-1}+1}=\dfrac{10\alpha}{\dfrac{\alpha}{\alpha-1}}=10(\alpha-1)$.
On a donc, grâce à la partie A, $1,27<\alpha<1,28 \iff 2,7<f(\alpha)=10(\alpha-1)<2,8$.