Devoir de mathématiques

Exercice 1 Simplifier (écrire avec une seule fraction) :

$$A=\dfrac{\dfrac{a^2}{3b}}{\dfrac{ac}{6b}}\ ;\quad B=\dfrac{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}}}\ ;\quad C=\dfrac{2+\dfrac{2+a}{2-a}}{2-\dfrac{2+a}{2-a}}\ ;\quad D=\dfrac{2^n}{\dfrac{1}{2}+2}+\dfrac{1-\dfrac{1}{2^n+1}}{4}$$

$$F(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\ ;\quad G(x)=\dfrac{-2}{\dfrac{3}{x+3}-2}-\frac{x}{x+2}$$

Exercice 2 Calculer la dérivée des fonctions suivantes (simplifier l'expression bien sûr, une seule fraction, expression factorisée ...) :

$$f_1(x)=x^3-5x^7+\frac{3}{x}\ ;\quad f_2(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)x\ ;\quad f_3(x)=\frac{5x}{x^2+3}\ ;\quad f_4(x)=\dfrac{x-\dfrac{1}{x}}{x+\dfrac{1}{x}}$$

$$g_1(x)=e^{3x+2}\ ;\quad g_2(x)=xe^x\ ;\quad g_3(x)=\frac{e^x+2}{e^x+1}\ ;\quad g_4(x)=\frac{e^{x^2}}{e^x+x}$$

Exercice 3 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression : $f(x)=2x^3-3x^2-1$.
Dresser le tableau de variation de f.
Préciser (en justifiant bien sûr) les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

Exercice 4 On considère la fonction f définie par l'expression $f(x)=2x+1+\dfrac{2}{x-2}$.
On note C_f sa courbe représentative.
Dresser le tableau de variation de f.
Préciser (en justifiant bien sûr) les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ et en 2, et les éventuelles asymptotes à $\mathcal{C}_f$.
Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 5 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par $f(x)=\dfrac{2+3x}{4+x}$.

Partie A On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0=3 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1}=f(u_n).$$

On admet que cette suite est bien définie.

1. Calculer u_1.
2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,4]$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, $1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant 3$.
4. a) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

   b) On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) ; montrer l'égalité : $\ell=\dfrac{2+3\ell}{4+\ell}$. .

   c) Déterminer la valeur de la limite ℓ.

Partie B On considère la suite (v_n) définie par : $v_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f(v_n)$.

1. On donne en **Annexe, à rendre avec la copie**, la courbe représentative, $\mathcal{C}_f$, de la fonction f et la droite D d'équation $y = x$.

   Placer sur l'axe des abscisses par construction géométrique les termes v_1, v_2 et v_3 sur l'**annexe, à rendre avec la copie**.

   Quelle conjecture peut-on formuler sur le sens de variation et le comportement de la suite (v_n) quand n tend vers l'infini ?

2. a) Montrer que pour tout entier naturel n, $1 - v_{n+1} = \left(\dfrac{2}{4 + v_n}\right)(1 - v_n)$.

   b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

3. La suite (v_n) converge-t-elle ? Si oui, préciser sa limite.

Annexe