Corrigé

Exercice 1

a) $u_1 = \sqrt{2+u_0} = \sqrt{3}$ et $u_2 = \sqrt{2+u_1} = \sqrt{2+\sqrt{3}}$

b) On peut démontrer cette propriété par récurrence.

Initialisation : La propriété est vraie pour $n=0$ car $0 < u_0 = 1 < 2$.

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie à un certain rang n, c'est-à-dire que $0 < u_n < 2$ alors, au rang suivant, on a

$$\begin{array}{rrcccc} & 2 & < & 2+u_n & < & 4 \\ \iff & \sqrt{2} & < & \sqrt{2+u_n} & < & \sqrt{4} \\ \iff & 0 < \sqrt{2} & < & u_{n+1} & < & 2 \end{array}$$

ce qui montre que la propriété est encore vraie au rang $n+1$ suivant.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la propriété $0 < u_n < 2$ est donc vraie pour tout entier n.

c) on vient de démontrer que la suite (u_n) est bornée.
On ne peut pas en déduire pour autant qu'elle converge, il faudrait, pour utiliser le résultat précédent, aussi connître son sens de variation (cf. théorème de convergence monotone).

Exercice 2

— **Affirmation 1.**
Les points A et C appartiennent au plan $\mathcal{P}$ car pour le point $A(2;1;-1)$: $2-2\times1+(-1)+1 = 2-2-1+1 = 0$, et pour le point $C(0;-2;3)$: $0-2\times2+3+1 = -4+3+1 = 0$.
Par conséquent la droite (AC) est incluse dans le plan $\mathcal{P}$: **l'affirmation 1 est vraie.**

— **Affirmation 2.**
$\overrightarrow{AB}(-3;1;5)$ et $\overrightarrow{CD}(1;3;-5)$, et donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -3+3-25 = -25 \neq 0$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas orthogonaux et par conséquent les droites (AB) et (CD) ne sont pas orthogonales non plus.
L'affirmation 2 est donc fausse.

— **Affirmation 3.**
La représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = 1+2t \\ y = -\dfrac{1}{2}+3t \\ z = 1-4t \end{array}\right.$ $t \in \mathbb{R}$ est celle d'une droite (d).
On cherche si les points A et C appartiennent à cette droite, ce qui signifierait exactement que $(d) = (AC)$.

On cherche une valeur de t telle que $\begin{cases} 2 = 1+2t \\ 1 = -\dfrac{1}{2}+3t \\ -1 = 1-4t \end{cases}$

La solution de ce système est $\dfrac{1}{2}$. Donc le point A appartient à la droite (d).

On cherche une valeur de t telle que $\begin{cases} 0 = 1+2t \\ -2 = -\dfrac{1}{2}+3t \\ 3 = 1-4t \end{cases}$

La solution de ce système est $-\dfrac{1}{2}$. Donc le point C appartient à la droite (d). Les deux points A et C appartiennent à la droite (d). **L'affirmation 3 est donc vraie.**

— **Affirmation 4.**
Un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ est $\vec{n}(1;-2;1)$.¡br /¿ Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{u}(1;-1;1)$ ne sont pas colinéaires.¡br /¿
L'affirmation 4 est fausse.