

Corrigé

Exercice 1

a) $u_1 = \frac{u_0}{1+u_0} = \frac{2}{3}$ et $u_2 = \frac{u_1}{1+u_1} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{2}{5}$.

b) On peut démontrer cette propriété par récurrence.

Initialisation : La propriété est vraie pour $n = 0$ car $u_0 = 2$ et $\frac{2}{2 \times 0 + 1} = 2$.

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie à un certain rang n , c'est-à-dire que $u_n = \frac{2}{2n+1}$, alors, au rang suivant, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n}{1+u_n} = \frac{\frac{2}{2n+1}}{1+\frac{2}{2n+1}} = \frac{\frac{2}{2n+1}}{\frac{2n+1+2}{2n+1}} = \frac{2}{2n+3} \\ &= \frac{2}{2(n+1)+1} \end{aligned}$$

ce qui montre que la propriété est encore vraie au rang $n+1$ suivant.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la propriété $u_n = \frac{2}{2n+1}$ est donc vraie pour tout entier n .

c) On a donc

$$u_n = \frac{2}{2n+1} = \frac{2}{2n \left(1 + \frac{1}{2n}\right)} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{2n}}$$

et donc, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2n} = 1$, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Exercice 2

a) $\vec{AB}(1; -1; -1)$ et $\vec{AC}(2; -5; -3)$. Ces coordonnées ne sont pas proportionnelles, et donc ces vecteurs ne sont donc pas colinéaires.

On en déduit que les points A, B et C ne sont pas alignés (et définissent alors un plan).

b) $\vec{AB} \cdot \vec{u} = 2 + 1 - 3 = 0$ et $\vec{AC} \cdot \vec{u} = 4 + 5 - 9 = 0$.

Le vecteur \vec{u} est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : c'est donc un vecteur normal au plan (ABC) .

La droite Δ est par conséquent orthogonale au plan (ABC) .

Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc de la forme $2x - y + 3z + d = 0$.

Le point $A(0; 4; 1)$ appartient au plan (ABC) , et donc $0 - 4 + 3 + d = 0 \iff d = 1$.

Ainsi une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + 3z + 1 = 0$.

c) La droite Δ passe par le point $D(7; -1; 4)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}(2; -1; 3)$.

Une représentation paramétrique de la droite Δ est donc :

$$\begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

d) Les coordonnées du point H sont solution du système :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 3t \\ 2x - y + 3z + 1 = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 3t \\ 2(7 + 2t) - (-1 - t) + 3(4 + 3t) + 1 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 3t \\ 28 + 14t = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 3t \\ t = -2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = -2 \\ t = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $H(3; 1; -2)$.