Corrigé

Exercice 1

a) $u_1 = \dfrac{u_0}{1+u_0} = \dfrac{2}{3}$ et $u_2 = \dfrac{u_1}{1+u_1} = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} = \dfrac{2}{5}$.

b) On peut démontrer cette propriété par récurrence.

Initialisation : La propriété est vraie pour $n=0$ car $u_0 = 2$ et $\dfrac{2}{2\times 0+1} = 2$.

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie à un certain rang n, c'est-à-dire que $u_n = \dfrac{2}{2n+1}$, alors, au rang suivant, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n}{1+u_n} = \frac{\frac{2}{2n+1}}{1+\frac{2}{2n+1}} = \frac{\frac{2}{2n+1}}{\frac{2n+3}{2n+1}} \\ &= \frac{2}{2n+3} = \frac{2}{2(n+1)+1} \end{aligned}$$

ce qui montre que la propriété est encore vraie au rang $n+1$ suivant.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la propriété $u_n = \dfrac{2}{2n+1}$ est donc vraie pour tout entier n.

c) On a donc

$$u_n = \frac{2}{2n+1} = \frac{2}{2n\left(1+\frac{1}{2n}\right)} = \frac{1}{n}\times\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}$$

et donc, comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{2n} = 1$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Exercice 2

a) $\vec{AB}(1;-1;-1)$ et $\vec{AC}(2;-5;-3)$. Ces coordonnées ne sont pas proportionnelles, et donc ces vecteurs ne sont donc pas colinéaires.
On en déduit que les points A, B et C ne sont pas alignés (et définissent alors un plan).

b) $\vec{AB}.\vec{u} = 2+1-3 = 0$ et $\vec{AC}.\vec{u} = 4+5-9 = 0$.
Le vecteur $\vec{u}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : c'est donc un vecteur normal au plan (ABC).
La droite Δ est par conséquent orthogonale au plan (ABC).

Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc de la forme $2x-y+3z+d=0$.
Le point $A(0;4;1)$ appartient au plan (ABC), et donc $0-4+3+d=0 \iff d=1$.
Ainsi une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x-y+3z+1=0$.

c) La droite Δ passe par le point $D(7;-1;4)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}(2;-1;3)$.

Une représentation paramétrique de la droite Δ est donc : $\begin{cases} x = 7+2t \\ y = -1-t \\ z = 4+3t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$.

d) Les coordonnées du point H sont solution du système :

$$\left\{\begin{array}{l} x=7+2t \\ y=-1-t \\ z=4+3t \\ 2x-y+3z+1=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=7+2t \\ y=-1-t \\ z=4+3t \\ 2(7+2t)-(-1-t)+3(4+3t)+1=0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x=7+2t \\ y=-1-t \\ z=4+3t \\ 28+14t=0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x=7+2t \\ y=-1-t \\ z=4+3t \\ t=-2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x=3 \\ y=1 \\ z=-2 \\ t=-2 \end{array}\right.$$

Donc $H(3;1;-2)$.