Corrigé

Exercice 1

a. Pour tout nombre entier naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{3}u_{n+1} - 2 = \frac{1}{3}(u_{n+1} - 6) = \frac{1}{3}v_n$.

On en déduit que (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = -5$.

b. D'après la question précédente, pour tout entier n, $v_n = v_0 q^n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n$, et donc que, pour tout entier n , $u_n = v_n + 6 = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$.

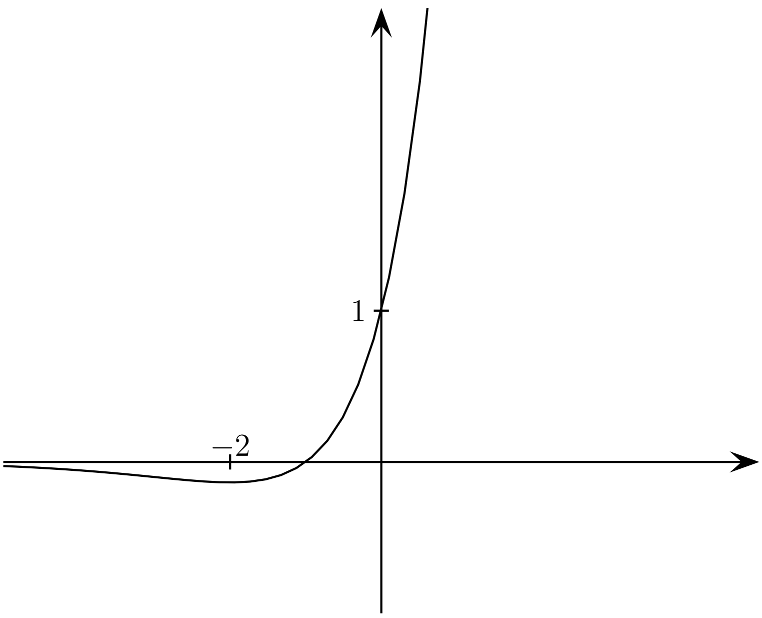
c. Comme $0 < \frac{1}{3} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$, et donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = 6$.

Exercice 2

a) On a un produit $f = uv$ avec $u(x) = 1 + x$ donc $u'(x) = 1$, et $v(x) = e^x$ donc $v'(x) = e^x$.
Ainsi, $f' = u'v + uv'$, soit $f'(x) = e^x + (1 + x)e^x = (2 + x)e^x$.
Le sens de variation est alors donné par le signe de la dérivée.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$2+x$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$	$\vert$	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
F		$\searrow$	$-e^{-2}$	$\nearrow$	

b)



c) La convexité est donnée par le signe de la dérivée seconde. On dérive donc f'.
On a $f"(x) = e^x + (2 + x)e^x = (3 + x)e^x$ et donc

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$3+x$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$	$\vert$	$+$	
$f"(x)$		$+$	0	$-$	

Ainsi, f est concave sur $]-\infty; -3]$, tandis qu'elle est convexe sur $[-3; +\infty[$.
Enfin, le point d'abscisse -3 est le seul point d'inflexion de la courbe de f.