Corrigé

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = x + 1 + e^{-x}$.

a)

$$f'(x) = 1 - e^{-x}$$
$$f"(x) = e^{-x}$$

b) Le sens de variation de f est donné par le signe de sa dérivée f'.
Ici, on a

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff 1 - e^{-x} > 0 \\ &\iff e^{-x} < 1 \\ &\iff -x < \ln(1) = 0 \\ &\iff x > 0 \end{aligned}$$

et donc

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	2	$\nearrow$	

c) En $x = 0$, on a vu que $f'(0) = 0$, ce qui signifie que la tangente en ce point est horizontale, et a donc pour équation $y = 2$.
Remarque : on peut bien sûr aussi utiliser la formule générale de l'quation de la tangente au point d'abscisse a, à savoir $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

d) Comme pour tout réel x, on a $f"(x) = e^{-x} > 0$, on en déduit que f est convexe sur $\mathbb{R}$. En particulier, f n'admet aucun point d'inflexion.

Exercice 2

a) $x_M + y_M + z_M - 3 = 2 - 3 + 1 - 3 = -3 \neq 0$ donc $M \notin P$.

b) $\vec{n}(1; 1; 1)$ est un vecteur normal de P, la droite D passant par M et orthogonale à P admet donc comme représentatation paramétrique : $\begin{cases} x &= 2 + t \\ y &= -3 + t \\ z &= 1 + t \end{cases}$

c) Comme $H \in D$, il existe un réel t tel que H ait pour coordonnées $\begin{cases} x &= 2 + t \\ y &= -3 + t \\ z &= 1 + t \end{cases}$
Comme de plus $H \in P$, ses coordonnées vérifient l'équation de P donc $x + y + z - 3 = 2 + t - 3 + t + 1 + t - 3 = 0$, soit $3t - 3 = 0$ et donc $t = 1$.
On a ainsi $H(3; -2; 2)$.

d) La distance du point M au plan P est HM. Comme $\overrightarrow{HM}(-1; -1; -1)$, on a donc $HM = \sqrt{3}$.