Corrigé

Exercice 1

a) Par lecture graphique, $I\left(\frac{1}{2};0;1\right)$ et $J(2;0;1)$.

b) On en déduit $\overrightarrow{DJ}(2;-1;1)$, $\overrightarrow{BI}\left(-\frac{1}{2};0;1\right)$ et $\overrightarrow{BG}(0;1;1)$.

c) $\overrightarrow{DJ}$ est normal au plan (BGI) si et seulement si il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan, par exemple $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BI}$, ce qui est bien le cas car :

$$\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BG} = 2\times 0 + (-1)\times 1 + 1\times 1 = 0$$

et

$$\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BI} = 2\times\left(-\frac{1}{2}\right) + (-1)\times 0 + 1\times 1 = 0$$

d) Un vecteur normal au plan (BGI) est donc $\overrightarrow{DJ}(2;-1;1)$ et donc ce plan a une équation cartésienne de la forme $2x-y+z+d=0$.
De plus $B(1;0;0)$ appartient à ce plan, d'où $2\times 1-0+0+d=0 \iff d=-2$.
Une équation cartésienne du plan (BGI) est donc bien $2x-y+z-2=0$.

Exercice 2

a) On a $u_1=\sqrt{10u_0}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ et $u_2=\sqrt{10u_1}=\sqrt{10\times 2\sqrt{5}}=2\sqrt{5\sqrt{5}}$.
Ensuite,

$$\begin{aligned}
v_0 &= \ln(u_0)-\ln(10)=\ln(2)-\ln(10)=\ln\left(\frac{2}{10}\right)=\ln\left(\frac{1}{5}\right)=-\ln(5)\\
v_1 &= \ln(u_1)-\ln(10)=\ln\left(\sqrt{20}\right)-\ln(10)\\
&= \frac{1}{2}\ln(20)-\ln(10)=\frac{1}{2}\ln(2\times 10)-\ln(10)\\
&= \frac{1}{2}\left(\ln(2)+\ln(10)\right)-\ln(10)\\
&= \frac{1}{2}\ln(2)-\frac{1}{2}\ln(10)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{10}\right)=\frac{1}{2}v_0
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \ln\left(u_{n+1}\right)-\ln(10)\\
&= \ln\left(\sqrt{10u_n}\right)-\ln(10)=\frac{1}{2}\ln(10u_n)-\ln(10)\\
&= \frac{1}{2}\Big(\ln(10)+\ln\left(u_n\right)\Big)-\ln(10)\\
&= \frac{1}{2}\ln\left(u_n\right)-\frac{1}{2}\ln(10)\\
&= \frac{1}{2}\left(\ln\left(u_n\right)-\ln(10)\right)=\frac{1}{2}v_n
\end{aligned}$$

Ainsi, la (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

c) On en déduit que, pour tout entier n, $v_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n v_0=-\dfrac{\ln(5)}{2^n}$
et donc, que $v_n=\ln\left(u_n\right)-\ln(10)=\ln\left(\dfrac{u_n}{10}\right) \iff u_n=10e^{v_n}$.

d) Comme (v_n) est une suite géométrique de raison $-1<q=\dfrac{1}{2}<1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$, et alors, par composition des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}10e^{v_n}=10$.