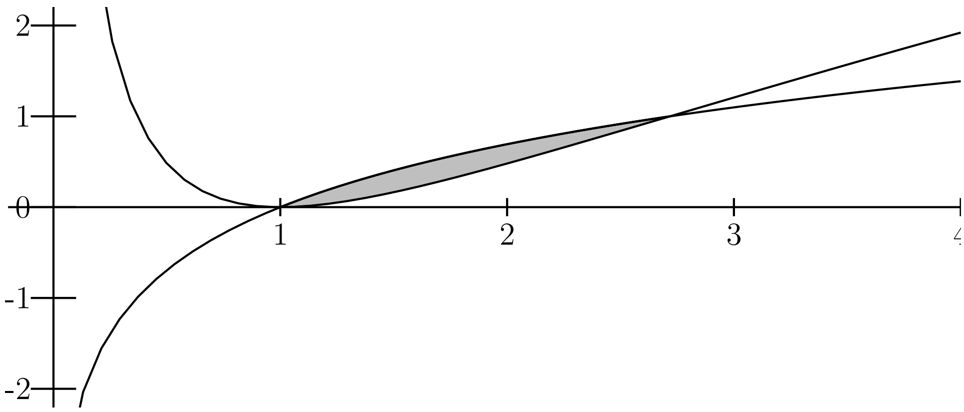
Oral de mathématiques

— *L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.*
— *La qualité des raisonnements, de l'expression, et la précision des justifications prendront une part importante dans l'appréciation de l'interrogation orale.*
— *Il s'agit d'une épreuve orale : il n'est pas indispensable de rédiger l'ensemble des réponses, des calculs, du raisonnement... Par contre vous devez être en mesure d'apporter toutes les justifications nécessaires.*
L'exposé de la méthode et du raisonnement sera pris en compte.

Exercice 1 Les courbes C et C' données ci-dessous représentent respectivement les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=\ln x$ et $g(x)=(\ln x)^2$.



On cherche à déterminer l'aire A (en unités d'aire) de la partie grisée.
On note $I=\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx$ et $J=\displaystyle\int_1^e (\ln x)^2\,dx$.

a) Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $F(x)=x\ln x-x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien. En déduire I.

b) Démontrer à l'aide d'une intégration par partie que $J=e-2I$.

c) Donner la valeur de A.

Exercice 2 Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{1}{2}u_n-\dfrac{3}{2} \end{cases}$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. On considère la suite (v_n) définie par $v_n=u_n+3$.
   Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
3. En déduire une expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.