Corrigé

Exercice 1

a) On dérive : $F = uv - u$ avec $u(x) = x$ donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln x$ donc $v'(x) = \dfrac{1}{x}$,
et alors, $F' = u'v - uv' - u'$,
soit $F'(x) = \ln x - x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x = f(x)$
ce qui montre que F est bien une primtive de f.

On en déduit
$$\begin{aligned} I &= \int_1^e \ln x\, dx = \Big[F(x) \Big]_1^e = F(e) - F(1) \\ &= (e \ln e - e) - (1 \ln 1 - 1) = 1 \end{aligned}$$

b) On pose $u = \ln x$ donc $u' = \dfrac{1}{x}$ et $v' = \ln x$ donc $v = x \ln x - x$ et et alors, en intégrant par parties,
$$\begin{aligned} J &= \Big[\ln x\,(x \ln x - x) \Big]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\,(x \ln x - x) \\ &= 0 - \int_1^e (\ln x - 1)\; dx \\ &= -\int_1^e \ln x\, dx + \int_1^e 1 dx \\ &= -I + e - 1 = e - 2I \end{aligned}$$
car $I = 1$.

c) On en déduit la valeur de A :
$$\begin{aligned} A &= \int_1^e (f(x) - g(x))\; dx \\ &= \int_1^e f(x)\, dx - \int_1^e g(x)\, dx \\ &= I - J = 1 - (e - 2I) \\ &= 1 - (e - 2) = 3 - e \end{aligned}$$

Exercice 2

1. $u_1 = \dfrac{1}{2}u_0 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2} \times 1 - \dfrac{3}{2} = -1\,;\quad u_2 = \dfrac{1}{2}u_1 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2} \times (-1) - \dfrac{3}{2} = -2\,;$
2. $v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = \left(\dfrac{1}{2}u_n - \dfrac{3}{2}\right) + 3 = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2}(u_n + 3) = \dfrac{1}{2}v_n.$

   Ainsi, la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
3. On en déduit que pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, avec $v_0 = u_0 + 3 = 4$, d'où, $v_n = 4 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 4 \times \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n-2}}$.

   On a alors, $v_n = u_n + 3 \iff u_n = v_n - 3 = \dfrac{1}{2^{n-2}} - 3$.