Corrigé

Exercice 1

1. $u_2 = \left(1+\dfrac{2}{1}\right)u_1 + \dfrac{18}{1} - 4 = 3\times(-5)+14 = -1$; $u_3 = \left(1+\dfrac{2}{2}\right)u_2 + \dfrac{18}{2} - 4 = 2\times(-1)+5 = 3$
   On peut conjecturer que la suite (u_n) est arithmétique de raison 4.
2. *Initialisation :* On a $u_1 = -5$, et pour $n = 0$, $4 \times 1 - 9 = -5$.
   Ainsi, initialement au rang $n = 1$, on a bien $u_n = 4n - 9$.

   Hérédité : Supposons que pour un certain entier $n \geqslant 1$, on ait $u_n = 4n - 9$, alors,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \left(1+\frac{2}{n}\right)u_n + \frac{18}{n} - 4 \\ &= \left(1+\frac{2}{n}\right)(4n-9) + \frac{18}{n} - 4 \\ &= 4n - 9 + \frac{8n}{n} - \frac{18}{n} + \frac{18}{n} - 4 \\ &= 4n - 5 \\ &= 4(n+1) - 9 \end{aligned}$$

   Ainsi au rang $n+1$ on a bien encore $u_{n+1} = 4(n+1) - 9$.

   Conclusion : On a donc démontré, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = 4n - 9$.

Exercice 2 On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

1. g est la somme de la fonction exponentielle et d'une fonction affine et est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0; +\infty[$, avec, $g'(x) = e^x - 1$.
   De plus, la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, lorsque $x \in [0; 1]$, on a $e^x \geqslant e^0 = 1$, et donc $g'(x) = e^x - 1 \geqslant 0$.
   On a $g'(x) > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$, car Ainsi, on a le tableau de variation :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	0 $+$	
g	0 ↗	

2. Comme g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et que $g(0) = 0$, on en déduit que pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) \geqslant g(0) = 0$.
3. On a donc pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) = e^x - x - 1 \geqslant 0$, et ainsi, $e^x - x \geqslant 1 > 0$ d'où aussi $e^x > x$.
4. On a $g"(x) = e^x > 0$ et donc g est convexe sur $\mathbb{R}$.