# Corrigé

**Exercice** 1

1. $u_0 = f(0) = \dfrac{2-0}{0+3} = \dfrac{2}{3}$, $u_1 = f(1) = \dfrac{2-1}{1+3} = \dfrac{1}{4}$ et $u_2 = f(2) = \dfrac{2-2}{2+3} = 0$.

   On a alors : $u_1 - u_0 = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{12}$ et $u_2 - u_1 = \dfrac{1}{4} - 0 = \dfrac{1}{4}$.
   La suite $(u_n)$ n'est donc pas arithmétique.

   De même, $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1} = 0$, et donc la suite $(u_n)$ n'est pas non plus géometrique.

2. Pour tout $x > 0$,
$$f'(x) = \frac{-1 \times (x+3) - (2-x) \times 1}{(x+3)^2} = \frac{-5}{(x+3)^2}$$
   et donc,

| $x$ | $0$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $-5$ | $-$ |
| $(x+3)^2$ | $+$ |
| $f'(x)$ | $-$ |
| $f$ | $\searrow$ |

3. On en déduite que la suite $(u_n)$ est décroissante.

**Exercice** 2

1. Le logarithme est défini sur $\mathbb{R}_+^* = ]0; +\infty[$. $f(x)$ est ainsi défini pour les valeurs réelles de $x$ telles que $e^x + e^{-x} > 0$.
   Or pour tout réel $x$, $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$, donc $e^x + e^{-x} > 0$.
   $f$ est ainsi définie sur $\mathbb{R}$.

2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$.
   Ainsi, par somme des limites, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x + e^{-x} = +\infty$, et, comme $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$, par composition des limites, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\left(e^x + e^{-x}\right) = \lim_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$.

3. Pour tout réel $x$,
$$f(x) = \ln\left(e^x + e^{-x}\right) = \ln\left(e^x\left(1 + e^{-2x}\right)\right) = \ln\left(e^x\right) + \ln\left(1 + e^{-2x}\right) = x + \ln\left(1 + e^{-2x}\right)$$

4. 
$$\begin{aligned}
f(x) = x + 2 &\iff x + \ln\left(1 + e^{-2x}\right) = x + 2 \\
&\iff \ln\left(1 + e^{-2x}\right) = 2 \\
&\iff 1 + e^{-2x} = e^2 \\
&\iff e^{-2x} = e^2 - 1 \\
&\iff -2x = \ln\left(e^2 - 1\right) \\
&\iff x = -\frac{1}{2}\ln\left(e^2 - 1\right)
\end{aligned}$$