Corrigé

Exercice 1 Tout d'abord, f est définie pour des valeurs strictement positives de x, soit $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$.
Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{1-2x}{x^2}$.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$1-2x$		$+$	0	$-$	
x^2	$\|$	$+$	$\|$	$+$	
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$-1+2\ln(2)$	$\searrow$	$-\infty$

Limite en 0 : $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}\left(1 + 2x\ln(x)\right)$, avec, par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\left(1+2x\ln(x)\right) = +\infty$, et alors, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

Limite en $+\infty$: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.
Ainsi, par addition des limites, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Exercice 2 On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + 1$.

1. $u_1 = \dfrac{2}{3}u_0 + 1 = \dfrac{5}{3}$ et $u_2 = \dfrac{2}{3}u_1 + 1 = \dfrac{19}{9}$.
2. On a $u_1 - u_0 = \dfrac{2}{3} \neq u_2 - u_1 = \dfrac{4}{9}$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.

   De même, $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{5}{3} \neq \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{19}{15}$ donc (u_n) n'est pas géométrique non plus.
3. On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 3$.
   a) Pour tout entier n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \dfrac{2}{3}u_n + 1 - 3 = \dfrac{2}{3}u_n - 2 = \dfrac{2}{3}\left(u_n - 3\right) = \dfrac{2}{3}v_n$.

   Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 3 = -2$.

   b) On en déduit que, pour tout entier n, $v_n = v_0 q^n = -2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

   c) On obtient alors, $v_n = u_n - 3 \iff u_n = v_n + 3 = -2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 3$.