Corrigé

Exercice 1

1. F est une primitive de f signifie que $F' = f$: il faut donc calculer la dérivée de F.
   F est un produit de deux fonctions : $F = uv$, avec $u(x) = x$, donc $u'(x) = 1$, et $v(x) = e^{-x} = e^{w(x)}$, donc $v'(x) = w'(x)e^{w(x)} = -e^{-x}$.
   On a alors, $F' = u'v + uv'$, soit $F'(x) = 1 \times e^{-x} + x\left(-e^{-x}\right) = (1-x)e^{-x} = f(x)$.
   Ainsi, F est bien une primitive de f.
   L'ensemble des primitives de f est donc l'ensemble des fonctions qui s'écrivent sous la forme $F + k$, où k est un réel quelconque.
2. Les variations de F sont données par le signe de sa dérivée $F' = f$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
e^{-x}		$+$	$\vert$	$+$	
$(1-x)e^{-x}$		$+$	0	$-$	
F	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

   On peut compléter avec les limites :
   - en $-\infty$, il n'y a pas de problème particulier : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$, et donc, par produit des limites, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$
   - en $+\infty$ on est face à une forme indéterminée "$\infty \times 0$".
     Il s'agit en fait de la propriété de croissances comparées $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et donc

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$$

3. Comme F est une primitive de f, on

$$\int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0) = 1e^{-1} - 0e^{-0} = \frac{1}{e}$$

Exercice 2

a) $x_M + y_M + z_M - 3 = 2 - 3 + 1 - 3 = -3 \neq 0$ donc $M \notin P$.

b) $\vec{n}(1;1;1)$ est un vecteur normal de P, la droite D passant par M et orthogonale à P admet donc comme représentatation paramétrique : $\left\{\begin{array}{ll} x & = 2+t \\ y & = -3+t \\ z & = 1+t \end{array}\right.$

c) Comme $H \in D$, il existe un réel t tel que H ait pour coordonnées $\left\{\begin{array}{ll} x & = 2+t \\ y & = -3+t \\ z & = 1+t \end{array}\right.$
   Comme de plus $H \in P$, ses coordonnées vérifient l'équation de P donc $x + y + z - 3 = 2 + t - 3 + t + 1 + t - 3 = 0$, soit $3t - 3 = 0$ et donc $t = 1$.
   On a ainsi $H(3;-2;2)$.

d) La distance du point M au plan P est HM. Comme $\overrightarrow{HM}(-1;-1;-1)$, on a donc $HM = \sqrt{3}$.