TP

Des proies et des prédateurs

Modélisation de phénomènes couplés

Terminale générale, spécialité mathématiques

Les phénomènes physiques, biologiques et économiques sont souvent régis par des équations différentielles. Souvent, ces phénomènes interagissent (boucles de rétroaction, couplages) et ne sont donc pas modélisés par **une** équation différentielle, mais par **des** d'équations différentielles, couplées entre elles.
Le modèle World 3, développé au MIT par Meadows & al. à la demande du club de Rome (les résultats ont été publiés dans un rapport intitulé « The limits to growth ») a permis ainsi dès les années 1970 de modéliser les interactions entre la population, la production industrielle par personne, la production agricole par personne, la pollution, le niveau des ressources non renouvelables. Les conclusions de cette étude datant de 1970 ont généré de vifs débats [1] et ont pu être comparées, 30 ans après, aux données réelles [2], mettant ainsi en valeur l'efficacité de ces modélisations mathématiques des années 70.

Dans ce TP, on étudie un exemple de phénomènes couplés, c'est-à-dire qui interagissent entre eux, mais avec un nombre d'interaction volontairement limité afin de le rendre abordable *(mais il n'est bien sûr pas interdit, par la suite, d'améliorer ces modèles en prenant en compte bien d'autres paramètres et interactions !)*. L'objectif de ce TP est aussi la construction, pas à pas, de tels modèles, depuis un modèle très simple vers d'autres plus élaborés et réels.

La modélisation suivante a été développée en 1926 par le mathématicien Volterra pour retranscrire l'évolution des populations de sardines et de requins en mer méditerranée. En effet, pendant la guerre, la pêche de sardines avait été interrompue et à la fin de la guerre la population de sardines était étonnamment moins nombreuse, c'était le premier modèle « proies – prédateurs ».

1) Les sardines seules

On note $s(t)$ le nombre de sardines à l'instant t (en années), et on désigne par α le taux annuel de naissance de sardines, et par β le taux annuel de mortalité.
On notera de plus $\sigma = \alpha - \beta$. On suppose qu'initialement, à l'instant 0, il y a 2000 sardines, c'est-à-dire que $s(0) = 2000$, et que $\alpha = 15\%$ et $\beta = 5\%$.

A. Évolution annuelle

1. Calculer le nombre de sardines au bout de un an et deux ans.
2. Exprimer $s(t+1)$ en fonction de $s(t)$.

Calculer et représenter graphiquement l'évolution de $s(t)$ sur 100 ans.

B. Un modèle plus fin, et continu L'étude annuelle fournit un modèle assez grossier. Pour l'affiner, on peut supposer que les naissances et morts des sardines sont uniformément distribuées au cours de l'année : le nombre de naissance ou de morts dans un intervalle de temps est proportionnel uniquement à la durée de cet intervalle (par exemple, d'une part il y a deux fois plus de naissances et de morts durant deux mois que durant un seul, et d'autre part, il y a par exemple autant de naissances et de morts durant 3 jours de janvier que 3 jours de mars ou de juin . . .)

3. Calculer le nombre de sardines au bout de 0,1 année puis 0,2 année.
4. Exprimer la variation de la population entre un instant t quelconque et $0,1$ année plus tard.

1. Il faut être capable d'imaginer, commenter, ou à défaut dans un premier temps de rechercher, les tenants et aboutissants de ce débat ! Il faut savoir, en résumé, savoir ce qu'est un modèle . . .
2. « comparison of the limits to growth with thirty years of reality », Graham Turner 2008

5. Exprimer de même plus généralement la variation de la population entre un instant t quelconque et h année plus tard (h quelconque inférieur à 1).

Calculer et représenter graphiquement l'évolution de $s(t)$ sur 100 ans, pour $h = 0,5$, $h = 0,1$ puis $h = 0,01$. Comparer avec le graphique du A.

6. Qu'obtient-on par passage à la limite $h \to 0$? Résoudre l'équation obtenue.

C. Une population limitée La population de sardines dépend aussi d'autres espèces en amont de la chaîne alimentaire qui vont limiter la taille de la population. L'ampleur de l'espace naturel alloué à l'espèce peut aussi contraindre la taille maximum de la population. Il est possible de modéliser cette population amont et son évolution, mais il est aussi dans un premier temps possible de contraindre simplement l'évolution de la population de sardines.
On suppose que la population de sardines ne peut pas excéder une taille maximale, notée S. On peut montrer qu'un modèle décrivant l'évolution de la population est :

$$\begin{aligned} s'(t) &= \sigma s(t) - \frac{\sigma}{S}\left(s(t)\right)^2 \\ &= \frac{\sigma}{S}\, s(t)\Big(S - s(t)\Big) \end{aligned} \qquad (1)$$

7. Écrire la méthode d'Euler pour cette équation différentielle.

Calculer et représenter graphiquement l'évolution de la population de sardines en fonction du temps. On prendra $S = 10000$ et un pas $h = 0,01$.

8. Au bout de combien de temps la population atteint-elle 95% de son maximum ?

Cette équation, qui donne le modèle mathématique de la croissance des populations animales, est aussi nommée Modèle de Verhuslt, d'après le mathématicien belge Verhuslt qui l'a proposée en 1838, et a joué un rôle important en biologie. Cette équation non-linéaire, est aussi appelée modèle logistique. Ce modèle va être repris au début du siècle précédent d'abord par le démographe américain Raymond Pearl qui est convaincu que ce modèle logistique explique les variations de toutes les populations vivantes. Le modèle logistique va ensuite surtout être développé par le mathématicien italien Volterra, plus connu pour son opposition au fascisme que pour ses travaux mathématiques. Dans cette équation, pour des petites valeurs de $s(t)$ devant S, on retrouve le modèle précédent : $s'(t) \simeq \sigma s(t)$. Par contre, quand $s(t)$ se rapproche de S, le facteur $S - s(t)$ se rapproche de 0 et limite donc la croissance $s'(t)$ de la population jusqu'à la limite où on aurait $s(t) = S$ donc $s'(t) = 0$ et $s(t)$ deviendrait donc constante égale à S (mais cette limite n'est bien sûr jamais atteinte ...).

Pour prendre en compte ces phénomènes de régulation de la population de sardines par la population de requins, nous pouvons encore améliorer notre modèle en complétant l'équation différentielle (1) et en écrivant alors l'équation (2) suivante. La population de requins sera notée r_0 et l'efficacité de la prédation sur la croissance à l'instant t par le terme $m\, s(t)\, r_0$, proportionnel à la fois aux nombres de sardines et requins présents, et où le facteur m traduit la qualité de la prédation. On obtient :

$$s'(t) = \frac{\sigma}{S} s(t)\Big(S - s(t)\Big) - m s(t) r_0 \qquad (2)$$

9. Écrire la méthode d'Euler pour cette nouvelle équation.

Calculer et représenter graphiquement l'évolution de la population de sardines en fonction du temps sur 200 ans.

Données : $s(0) = 2000$; $\sigma = 0,1$; $S = 10000$; $m = 0,00025$ *et* $r_0 = 500$

10. Si les requins sont réintroduits en plus petit nombre, par exemple 200, que se passe-t-il ? Trouver la valeur de r_0 maximum pour avoir une coexistence de ces 2 populations sur du long terme d'après ce modèle.

2) Les requins

Les requins sont en fin de chaine alimentaire. Supposons que par lubie de régime ou snobisme alimentaire, ils ne mangent que des sardines. La population de requins croît si les requins peuvent manger et se reproduire.

11. En notant p l'efficacité de la prédation (il n'y a pas nécessairement égalité entre m et p, chez les requins aussi le gaspillage existe), l'équation différentielle régissant la population de requins est

$$r'(t) = ps(t)r(t) \tag{3}$$

12. Écrire la méthode d'Euler pour cette nouvelle équation.

Calculer et représenter graphiquement l'évolution des populations de sardines et de requins en fonction du temps sur 200 ans.
Tracer aussi le portrait de phase c'est à dire l'évolution d'une population en fonction de l'autre.
Données : $s(0) = 2000$; $\sigma = 0,1$; $S = 10000$; $r(0) = r_0 = 500$; $m = 0,00009$ *et* $p = 0,00009$

13. Ne mangeant que des sardines, la population de requins ne peut pas rester constante s'il n'y a plus de nourriture. On intègre alors dans le modèle un facteur de mortalité noté c à l'équation (3) ; le nouveau modèle s'écrit sous la forme :

$$r' = psr - cr \tag{4}$$

Écrire la méthode d'Euler pour cette nouvelle équation.

Modifier le programme précédent en conséquence. *Donnée :* $c = 0,3$, *soit 30% de mortalité annuelle.*

14. Que donne l'évolution à très long terme de ces 2 populations ?
15. Calculer formellement la valeur des populations initiales qui permettrait un équilibre des populations stable dès le départ.

Tester ces valeurs sur la simulation numérique.

3) Et avec un prélèvement dû à la pêche ?

16. Soit P le pourcentage de poisson prélevé à chaque génération. En supposant que ce pourcentage soit le même pour chacune de ces 2 espèces, intégrer son influence au modèle précédent pour une pêche de 4% de la population chaque année.
17. La pêche a-t-elle une influence sur l'évolution des populations de requins et de sardines ? Une population est-elle favorisée par rapport à l'autre vis-à-vis de la modélisation précédente ?
18. Trouver la valeur de P maximum pour qu'aucune des 2 populations ne soient décimées. Rappel, les chiffres utilisés pour modéliser la taille des populations sont pour une certaine surface d'habitat (1 km^2 par exemple). Il est possible d'avoir 0,9 requins sans pour autant avoir extinction de l'espèce. Il sera considéré arbitrairement qu'il faut pour tout t, $r(t) > 0,2$ pour que l'espèce soit préservée.
19. Calculer formellement la valeur des populations initiales qui donnerait un état d'équilibre des populations stable dès le départ, puis tester ces valeurs sur le modèle précédent.