

L'**épidémiologie** est la science qui étudie les facteurs susceptibles d'influer sur une maladie, sa propagation dans une société. L'objectif de modèles épidémiologiques est d'apporter des éléments de réponse à des questions telles que :

- comment la maladie va-t-elle se développer et se propager dans le temps ?
- à quelle proportion de malades peut-on s'attendre dans 3 mois ?
- quelle proportion de la population va être malade, à court, moyen ou long terme ?
- le nombre de personnes infectées atteint-il un maximum ? si oui, quand ?  
Sur quels paramètres peut-on influencer pour diminuer / déplacer ce maximum ?
- enfin, bien sûr, comment empêcher purement et simplement la propagation de la maladie, c'est-à-dire éviter l'épidémie ?

## 1) Modèle SIR de base

Le modèle SIR est un modèle de base en épidémiologie. Il a été présenté il y a environ un siècle (plus précisément en 1927, par Kermarck et McKendrick, respectivement mathématicien et médecin) pour expliquer a posteriori l'épidémie de peste de Bombay en 1905.

Dans ce modèle, la population d'étude est divisée en trois compartiments d'individus :

**Susceptibles** : les individus sains et qui peuvent contracter la maladie ;

**Infectés** : les malades, et donc aussi, dans ce modèle, les individus contagieux ;

**Rétablis** : (**R**ecovered) ceux qui ont déjà été malades et sont maintenant immunisés (c'est le modèle de base, incluant aussi dans ce groupe les morts suite à la maladie...).

On note, à chaque instant  $t$ , les proportions respectives  $S(t)$ ,  $I(t)$  et  $R(t)$  d'individus sains, infectés et rétablis.

On considère dans un premier temps (modèle SIR de base) :

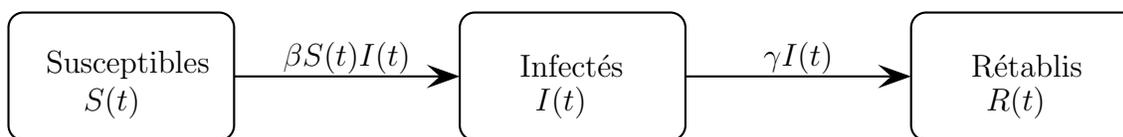
- la population globale ne varie pas pendant la durée étudiée (pas de naissances, d'immigration)
- le nombre de nouveaux cas pendant une durée donnée, c'est-à-dire de nouveaux individus infectés, est proportionnel au nombre de contacts  $S(t) \times I(t)$  entre individus susceptibles et individus infectés sur cette durée.

On note  $\beta$  ce coefficient de proportionnalité, qui s'appelle le **taux de transmission**.

- la population est brassée de manière homogène ;
- chaque personne rétablie (ou décédée) est aussi immunisée et ne peut plus être infectée.
- on considère enfin une **durée moyenne d'infection**  $\lambda$ , ou encore un taux  $\gamma = \frac{1}{\lambda}$  de guérison.

Par exemple si en moyenne il faut  $\lambda = 5$  jours pour guérir, chaque jour  $\gamma = \frac{1}{5}$  de la population se rétablit (ou décède).

On résume les éléments du premier modèle par le schéma :



et ce modèle s'écrit, algébriquement,

$$\begin{cases} \frac{\Delta S(t)}{\Delta t} = -\beta S(t)I(t) \\ \frac{\Delta I(t)}{\Delta t} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\ \frac{\Delta R(t)}{\Delta t} = \gamma I(t) \end{cases}$$

1. Ce modèle se réécrit, en considérant une évolution de jour en jour :

$$\begin{cases} S(t+1) = \dots \\ I(t+1) = \dots \\ R(t+1) = \dots \end{cases}$$

On partira par la suite des données initiales suivantes  $S(0) = 0,95$ ,  $I(0) = 0,05$  et  $R(0) = 0$ .

 Calculer et représenter l'évolution conjointe des proportions  $S$ ,  $I$  et  $R$ , et donner une estimation de ces proportions au bout de 3 mois.

Compléter le tableau suivant, avec les valeurs obtenues au bout de 3 mois :

	$\beta$	$\lambda$	$S$	$I$	$R$
Grippe	0,6	6			
Rougeole	0,8	20			
Peste (Bombay, 1905)	0,0273	56,2			

Préciser, pour chacune des maladies précédentes, s'il y a un pic d'infection

2. Écrire, à la limite où  $t \rightarrow 0$ , le système d'équations différentielles obtenu.

a) Préciser le signe de  $S'(t)$  et de  $R'(t)$  puis les variations de  $S$  et  $R$ . Vérifier ces variations sur les résultats simulés obtenus.

b) Préciser à quelle condition on a  $I'(t) = 0$ . Exprimer cette condition en faisant intervenir le nombre  $R_0 = \beta\lambda$ .

Préciser alors la variations de  $I$  en fonction de  $S(t)$ . Vérifier ces variations sur les résultats simulés obtenus.

Ce nombre  $R_0 = \beta\lambda$  s'appelle le **taux de reproduction de base** et fournit donc un seuil : comme  $S(t)$  est une proportion, donc  $S(t) < 1$  : si  $R_0 > 1$  alors il va y avoir une épidémie et un pic de malades, ce qui n'arrivera pas si  $R_0 < 1$ .

Dans le modèle de base SIR, éviter l'épidémie, ou chercher à atténuer son intensité revient à chercher à diminuer ce coefficient  $R_0$ , et donc à diminuer  $\beta$  et/ou  $\lambda$ .

c) En revenant à leur signification, donner des moyens de diminuer ces coefficients  $\beta$  et  $\lambda$  et donc d'enrayer l'épidémie.

## 2) Influence d'une vaccination

L'objectif de la vaccination est évidemment d'enrayer l'épidémie, bien sûr sans que les individus ne soient malades. On peut penser naïvement que pour atteindre cet objectif il est nécessaire de vacciner toute la population, mais ce n'est pas forcément le cas...

On note  $p$  la proportion d'individus susceptibles initialement et on note  $R = pR_0$  le taux de reproduction de base. En l'absence de vaccination, on a  $p = 1$  et donc  $R = R_0$  : tout le monde est susceptible

d'être infecté.

Supposons maintenant qu'une proportion  $v > 0$  de la population soit vaccinée et donc que  $p = 1 - v < 1$ . En reprenant le résultat obtenu précédemment, pour éviter l'épidémie, il suffit d'avoir un taux de vaccination :

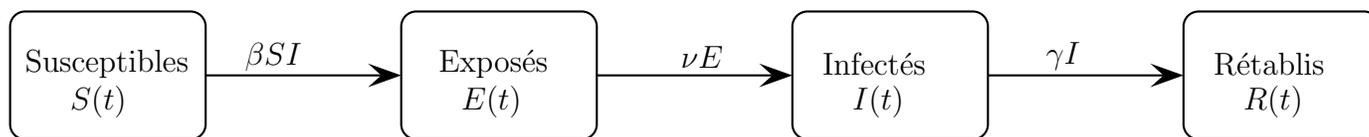
$$R < 1 \iff v > 1 - \frac{1}{R_0}$$

3. Compléter le tableau et commenter :

Maladie	Grippe	Polio	Rougeole	Malaria/Paludisme
$R_0$	$\sim 3$	5	16	100
Taux de vaccination limite				

### 3) Modèle SEIR

On introduit un quatrième état, ou quatrième compartiment :  $E$  pour exposed, ou exposé, contaminé, mais pas encore contagieux (période de latence avant le début de la contagiosité, comparable à la période d'incubation entre le moment d'infection et le début de la maladie). De même que pour le coefficient  $\gamma = 1/\lambda$ , on a  $\nu = 1/\text{période d'incubation}$ .



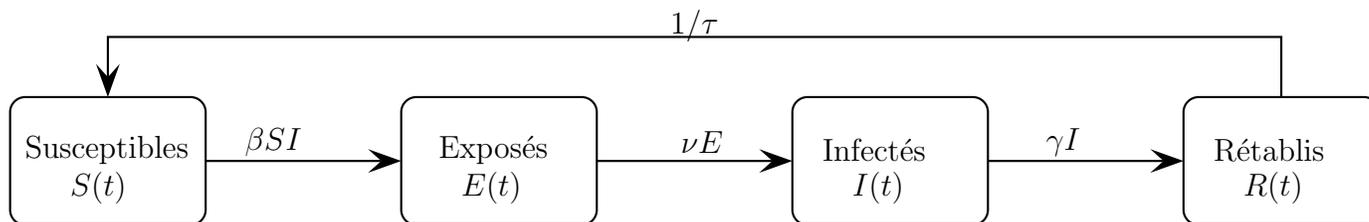
4. Modifier le modèle SIR précédent en conséquence.

 Calculer et représenter l'évolution conjointe des proportions  $S$ ,  $I$  et  $R$ , et observer les variations entre les deux modèles.

Données : pour la grippe,  $\nu = 1/2$ , et pour la rougeole  $\nu \simeq 1/10$ .

### 4) Modèle SEIRS

SEIRS correspond au modèle SEIR avec perte d'immunité : au bout d'un temps moyen  $\tau$  les individus rétablis redeviennent susceptibles d'être contaminés puis infectés :



En période d'épidémie, cette grandeur est peu prise en compte car l'échelle de temps sur laquelle on étudie le phénomène dépasse cette durée de perte d'immunité.

Néanmoins, pour la compréhension a posteriori, sa prise en compte peut être intéressante.

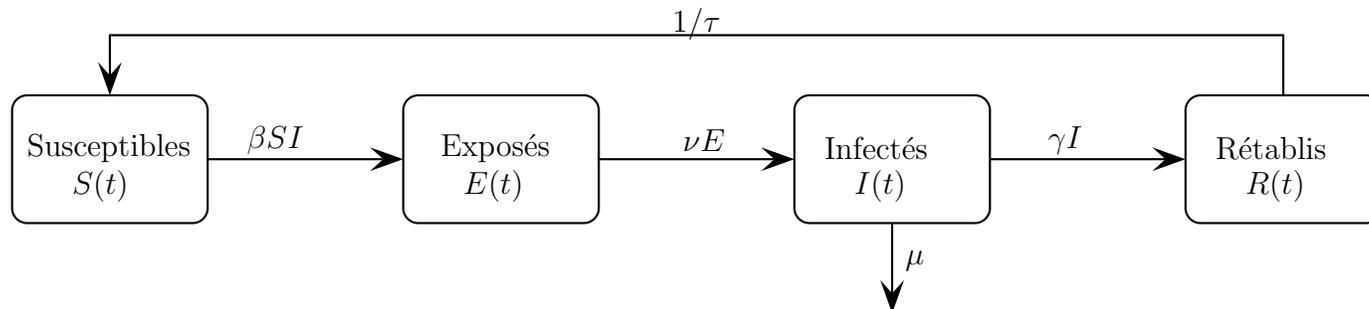
5. Modifier le modèle précédent.

 Observer les variations entre les deux modèles.

Données : on pourra prendre des temps de l'ordre de  $\tau = 3$  mois, 6 mois ou 1 an.

## 5) Modèle SEIRS avec mortalité

On peut prendre en compte la mortalité chez les individus infectés.



Ce taux de mortalité est difficile à mesurer, compte tenu notamment des cas infectés mais asymptomatiques, c'est-à-dire qui risquent de ne pas être décomptés parmi les infectés.

6. Modifier le modèle précédent.



Observer les variations entre les deux modèles.

Donnée pour la grippe :  $\mu \simeq 10\,000/2\,000\,000 = 0,005$ .

## 6) Affinement socio-psychologique

À partir du moment où on a compris que les coefficients qui influent sur le devenir, ou non, de l'épidémie ne dépendent pas que des caractéristiques intrinsèques de la maladie, particulièrement le coefficient  $\beta$  qui prend en compte les interactions humaines, on comprend à quel point on peut affiner le modèle avec, aussi, des considérations sociologiques, psychologiques, économiques, ...

Le sociologue H. Lagrange<sup>1</sup> propose par exemple d'affiner le modèle SIR de base (ou un des autres vus précédemment) en s'attachant aux comportements sociaux face au danger, ici à la mortalité. En effet, une forte mortalité va avoir pour conséquence d'effrayer la population, qui va en retour avoir largement plus tendance à limiter ses interactions sociales et donc limiter la propagation du virus. Il propose ainsi de modifier le paramètre constant  $\beta$  en

$$\beta'(t) = \beta \left(1 - D(t)\right)^k$$

où  $D(t)$  est la mortalité au temps  $t$ , avec les notations précédentes,  $D(t) = \mu I(t)$ , et  $k$  un coefficient d'intensité.

7. Modifier les modèles précédents.



Observer les variations entre les deux modèles.

Donnée : essayer avec différentes valeurs  $k = 1$ ,  $k = 2$ ,  $k = 10$ .

1. « Coronavirus et comportement individuel », <http://variances.eu/?p=4837>