Limites de suites

Terminale générale
spécialité maths

Le mouton noir d'Ecosse

Un biologiste, un physicien et un mathématicien partent en vacances en Écosse pour la première fois. Alors qu'ils sont encore dans le train vers Édimbourg, ils voient un mouton noir.
Le biologiste s'exclame :
« Incroyable ! Les moutons sont noirs en Écosse ! »
Le physicien, agacé, corrige le biologiste :
« Tout ce que l'on peut dire, c'est qu'il y a au moins un mouton noir en Écosse. »
Le mathématicien, placide, rajoute :
« En fait, tout ce que l'on peut dire, c'est qu'au moins la moitié d'un mouton est noir en Écosse. »

Table des matières

I Révisions

Exercice 1 Soit (u_n) une suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + n - 1$.

1. Donner u_0, u_1 et u_2.
2. Exprimer en fonction de n : a) u_{n-1} b) u_{n+1} c) $u_{n+1} - u_n$
3. La suite (u_n) est-elle arithmétique ?
4. Quel est le sens de variation de (u_n) ?

Exercice 2 Préciser si les suites suivantes (u_n) sont arithmétiques, géométriques, ou ni l'un ni l'autre.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2$.

b. $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - 5$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2n^2 + 5n + 3}{n+1}$.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{3^{2n+1}}{2n}$.

e. $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -\dfrac{2}{3}u_n + 4$, puis (v_n) définie par $v_n = u_n - \dfrac{12}{5}$.

Exercice 3 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \dfrac{n+1}{n^2+1}$.

1. Déterminer la fonction f telle que $u_n = f(n)$.
2. Etudier le sens de variation de f et en déduire celui de (u_n).
3. Calculer u_{10}, u_{100}, $u_{10\,000}$, u_{10^8} et $u_{10^{16}}$.
   Que peut-on dire des valeurs de u_n lorsque n devient de plus en plus grand ?

Exercice 4 Même exercice avec les suites (u_n) définies pour tout entier naturel n par

1) $u_n = \dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$. 2) $u_n = 3n^2 + 4n - 5$. 3) $u_n = -n^3 + 6n^2 - 9n + 5$ 4) $u_n = \dfrac{1}{2}e^n$ 4) $u_n = 3e^{-0{,}5n+1}$

Exercice 5 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n} + 1$.

Déterminer la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$, puis tracer $\mathcal{C}_f$ et placer u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4 sur l'axe des abscisses.

Exercice 6 On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = xe^{-x}$ ainsi que la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Dresser le tableau de variations de f et tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ de f.

b) Construire sur le graphique précédent les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnées nulles et d'abscisses repsectives u_0, u_1 et u_2.

c) Conjecturer le sens de variation de la suite et sa limite. *Ces résultats seront démontrés plus tard...*

Exercice 7 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{3 + 2u_n}$.

Pour tout entier n, on pose $v_n = \dfrac{3}{u_n}$.

1. Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique.
2. En déduire une expression de v_n, puis de u_n en fonction n.

Exercice 8 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n - \dfrac{1}{6}$.

Pour tout entier n, on pose $v_n = 2u_n + 1$.

1. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique.
2. En déduire une expression de v_n, puis de u_n en fonction n.

II Principe de récurrence

Exemple : On considère la suite (u_n) définie pour par $u_0 = 2$, puis pour tout entier n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$.
Montrer que, pour tout entier n, $u_n \geqslant 0$.

Il y a ici une **infinité** de relation algébrique, il s'agit de montrer la relation $u_n \geqslant 0$ **pour tout** $n \geqslant 0$, c'est-à-dire pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, ..., $n = 10$, $n = 112$, ...

Pour démontrer cette infinité de relation, on peut déjà commencer par le **vérifier** au début, pour les premiers termes :

- pour $n = 0$, $u_0 = 2$, et donc la propriété est bien vraie, $u_0 \geqslant 0$.
- pour $n = 1$, $u_1 = \sqrt{u_0 + 5} = \sqrt{2 + 5} = \sqrt{7} \geqslant 0$, et la propriété est toute aussi vraie
- pour $n = 2$, $u_2 = \sqrt{u_1 + 5} \geqslant 0$, car $u_1 \geqslant -5$
- ...

Pour traiter le problème d'une manière plus générale, on peut remarquer que, **tant que** que le terme $u_n \geqslant -5$, alors le terme suivant u_{n+1} est bien défini, et étant une racine carrée, il est positif ou nul.

Or, étant positif ou nul, il est aussi supérieur à -5, donc son successeur est bien défini, et donc positif, donc son successeur ...

Cette propriété est une propriété d'**hérédité** :

Si on suppose qu'à un rang n, on a $u_n \geqslant 0$, alors, **au rang suivant**, on a $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5} \geqslant \sqrt{0 + 5} = \sqrt{5} \geqslant 0$.

En d'autres termes, $\boxed{\text{si la propriété est vraie à un rang } n\text{, elle est aussi vraie au rang } n+1 \text{ suivant.}}$ Or, nous avons vu que cette propriété est vraie **initialement** au rang $n = 0$ (car $u_0 = 2 \geqslant 0$), et donc, d'après cette hérédité, elle est aussi vraie au rang $n + 1 = 1$, puis aussi au suivant, $n + 1 = 2$, puis au suivant, puis ..., puis ...

On a ainsi démontré que la relation $u_n \geqslant 0$ est vraie à tous les rangs n.

Ce raisonnement s'appelle un **raisonnement par récurrence**.

Principe du raisonnement par récurrence Soit $P(n)$ une proposition qui dépend d'un entier naturel n. Pour démontrer que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, il suffit de :

1. **Initialisation :** vérifier que pour le premier entier n_0, $P(n_0)$ est vraie ;
2. **Hérédité de la propriété :** montrer que, si on suppose que $P(n)$ est vraie pour un certain entier n (**hypothèse de récurrence**), alors $P(n + 1)$ est encore vraie.
3. **Conclusion :** On conclut alors que, d'après le principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour **tout** entier $n \geqslant n_0$.

Exemple 2 : On considère la suite (u_n) définie pour par $u_0 = 0$, puis pour tout entier n, $u_{n+1} = 2 + 3u_n$.
Montrer que, pour tout entier n, $u_n = 3^n - 1$.

Exercice 9 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$.
Montrer que, pour tout entier n, $0 \leq u_n \leq 3$.

Exercice 10 Montrer que, pour tout $n \geq 10$, $2^n \geq 100n$.

Exercice 11 Soit la suite v définie par $v_0 = 2$, puis pour tout entier n, $v_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{v_n}$.

Montrer que pour tout entier naturel n, $\dfrac{3}{2} \leq v_n \leq 2$.

Exercice 12 *Somme des premiers entiers, de leurs carrés, de leurs cubes.*

a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

c) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 13 Soit n un entier naturel non nul, et S_n la somme $S_n=\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p(p+1)}$.

1. Ecrire un algorithme permettant de calculer S_n où n est un entier naturel choisi par l'utilisateur.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier $n\geq 1$, $S_n=\dfrac{n}{n+1}$
3. a) Verifier que $\dfrac{1}{p(p+1)}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p+1}$

   b) Retrouver alors le résultat du 1. par une autre méthode.

Exercice 14 Soit a un réel strictement positif. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $(1+a)^n\geq 1+na$.

Exercice 15 Soit u la suite définie par $u_0=3$, et pour tout entier n par $u_{n+1}=2(u_n-1)$.
Calculer les premiers termes de cette suite, et conjecturer une expression de u_n.
Démontrer alors cette conjecture.

Exercice 16 Soit la suite u définie par $u_0=5$ et, pour tout entier n, $u_{n+1}=\sqrt{3u_n+1}$.
Démontrer que cette suite est monotone.

III Limite d'une suite

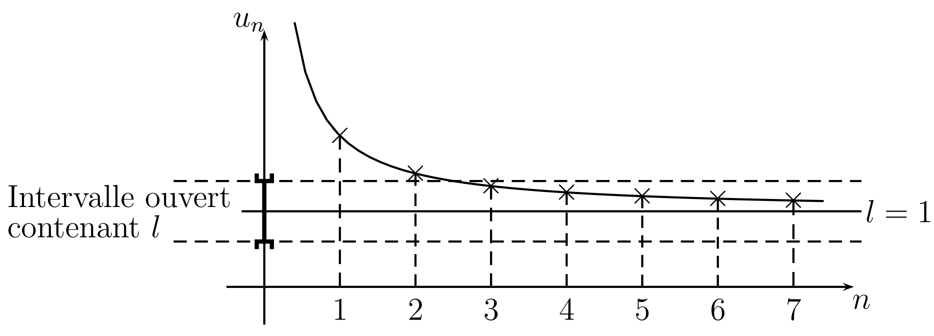
1) Définition et exemples

Définition *La suite numérique (u_n) converge vers le réel l si et seulement si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.*

On note : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=l$ ou encore $\lim u_n=l$.

Remarque : Cette condition : "tout intervalle ouvert" est très forte car elle permet, entre autre, que l'intervalle puisse être arbitrairement petit.

Exemple : Soit la suite (u_n) définie pour $n\geqslant 1$ par $u_n=\dfrac{1}{n}+1$.



Soit par exemple l'intervalle ouvert $I=]0,99\,;\,1,01[$ contenant $l=1$. Alors,

$$u_n\in I\iff 0,99<u_n<1,01\iff 0,99<\frac{1}{n}+1<1,01\iff -0,01<\frac{1}{n}<0,01\iff n>\frac{1}{0,01}=100$$

Ainsi, dès que $n > 100$, tous les termes u_n sont dans l'intervalle ouvert $I =]0,99\ ;\ 1,01[$.
On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Définition

- *On dit que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert de la forme $]A;+\infty[$, avec $A \in \mathbb{R}$, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.*
- *On dit que la suite (u_n) tend vers $-\infty$ lorsque tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty;A[$, avec $A \in \mathbb{R}$, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.*

2) Limites usuelles

Propriété

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} n = +\infty \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$$

et plus généralement, pour tout entier p non nul $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p = 0$.

<u>Démonstration:</u> Par exemple pour la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2$.
Soit I un intervalle ouvert quelconque de la forme $I =]A;+\infty[$, avec A un réel strictement positif.
$u_n \in I =]A;+\infty[\iff n^2 > A \iff n > \sqrt{A}$ (car $A > 0$).
Soit n_0 un entier tel que $n_0 > \sqrt{A}$, alors, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a $u_n \in I$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. □

Propriété

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0$$

et plus généralement, pour tout entier p non nul $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0$.

<u>Démonstration:</u> Par exemple pour la suite $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
Soit I un intervalle ouvert quelconque de la forme $]-\varepsilon;+\varepsilon[$, avec $\varepsilon > 0$.
$u_n \in I \iff -\varepsilon < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \iff 0 < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \iff \sqrt{n} > \dfrac{1}{\varepsilon} \iff n > \dfrac{1}{\varepsilon^2}$.
Soit n_0 un entier tel que $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon^2}$, alors, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n \in I$, et donc la suite (u_n) converge vers 0 : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. □

3) Opérations sur les limites

(u_n) et (v_n) sont deux suites, et L et L' sont deux réels.
Le point d'interrogation correspond à une forme indéterminée, c'est-à-dire un cas où on ne peut pas conclure directement.

Théorème Limite de la somme $u_n + v_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n =$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

<u>Exemple :</u> Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 3 + 2n - \dfrac{1}{n^3}$.

On a :

$$\left.\begin{array}{l}\bullet \lim\limits_{n\to+\infty} 3 = 3\\ \bullet \lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty\\ \bullet \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^3} = 0\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\text{Par addition des limites}\\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty\end{array}$$

Théorème Limite du produit $u_n \times v_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	$L \neq 0$	$+\infty$ *ou* $-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$ *ou* $-\infty$	$+\infty$ *ou* $-\infty$	$+\infty$ *ou* $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n =$	$L \times L'$	$+\infty$ *ou* $-\infty$ *(règle des signes du produit)*	$+\infty$ *ou* $-\infty$ *(règle des signes du produit)*	?

Exemple : Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \left(2 + \dfrac{1}{n}\right)(1 + n^2)$.

Par sommes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2 + \dfrac{1}{n}\right) = 2$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + n^2\right) = +\infty$, puis par limite du produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Théorème Limite de l'inverse $\dfrac{1}{u_n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	$L \neq 0$	0 *par valeurs positives*	0 *par valeurs négatives*	$+\infty$ *ou* $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} =$	$\dfrac{1}{L}$	$+\infty$	$-\infty$	0

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{1}{n^2 + \sqrt{n}}$. Par limite de somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + \sqrt{n} = +\infty$, et donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Théorème Limite du quotient $\dfrac{u_n}{v_n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	$+\infty$ *ou* $-\infty$	$L \neq 0$ *ou* $+\infty$ *ou* $-\infty$	0	$+\infty$ *ou* $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$L' \neq 0$	$+\infty$ *ou* $-\infty$	$L' \neq 0$	0	0	$+\infty$ *ou* $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n =$	$\dfrac{L}{L'}$	0	$+\infty$ *ou* $-\infty$	$+\infty$ *ou* $-\infty$ *(règle des signes du produit)*	?	?

Méthode en cas de forme indéterminée : On essaie dans ce cas de lever l'indétermination en transformant l'expression (factorisation, développement, ...)
Par exemple, soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 2n + 4$.
On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} -2n = -\infty$, donc on a une forme indéterminée pour la limite de la somme.

Néanmoins, $u_n = n^2 \left(1 - \dfrac{2n}{n^2} + \dfrac{4}{n^2}\right) = n^2 \left(1 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{4}{n^2}\right)$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$,
et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{4}{n^2}\right) = 1$, d'où, par produit des limites $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Remarque : n^2 est le terme dominant en $+\infty$ dans l'expression de u_n. C'est lui qui impose son comportement en $+\infty$, ce qui apparaît clairement quand on le factorise.

Exercice 17 Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite (u_n) :

a) $u_n = n^3 + \dfrac{1}{n}$ b) $u_n = (3n+1)(-7n+5)$ c) $u_n = \dfrac{3 - \dfrac{4}{n}}{\dfrac{2}{n^2}}$ d) $u_n = n^3 - n^2 + 3n - 1$

e) $u_n = \dfrac{2n^2+1}{-n^2+6}$ f) $u_n = \dfrac{n^2+3n-5}{n^3-6n^2+1}$ g) $u_n = n\sqrt{n} - n$ h) $u_n = (-2n+3)\dfrac{n+3}{-n^2+n+6}$

i) $u_n = \dfrac{n}{n+\sqrt{n}}$ j) $u_n = \dfrac{9-n^2}{(n+1)(2n+1)}$ k) $u_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{n}{(2n+1)^2}$ l) $u_n = \dfrac{2}{3n} - \dfrac{2n^2+3}{3n^2+n+1}$

4) Autres théorèmes de convergence

a) Théorèmes de comparaison

Théorème *Théorème des gendarmes pour les suites*

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que,

$$\text{pour tout entier } n, \quad v_n \leq u_n \leq w_n .$$

Si de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Corollaire *Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que, pour tout entier n, $u_n \geq v_n$.*

- *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.*
- *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.*

Exercice 18 *D'après BAC*

(u_n) est une suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

a. Etudier le sens de variation de (u_n).

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier n, $u_n = (n+1)^2$.

c. En déduire que, pour tout entier n, $u_n \geqslant n^2$.

d. La suite (u_n) est-elle minorée ? majorée ? Justifier.

e. Donner la limite de (u_n).

Exercice 19 Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = 1$ et, pour tout entier n, par $a_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n + n - 2$.

1. a) Quelle est la valeur retournée lors de l'appel *fonction(3)* de la fonction python ci-contre ?

   b) Qu'affiche l'instruction suivante ?
   for i in range(10) : print(fonction(i))

```
def fonction(n) :
  a=1
  for p in range(n) :
    a=1/3*a+p-2
  return(a)
```

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 7$, on a $a_n \geqslant n - 3$.
3. En déduire la limite de la suite (a_n).

b) Suites minorées, majorées et bornées

Définition *Une suite (u_n) est dite :*

- ***minorée*** *lorsque qu'il existe un réel m tel que, pour tout entier n, $u_n \geqslant m$.*
- ***majorée*** *lorsque qu'il existe un réel M tel que, pour tout entier n, $u_n \leqslant M$.*
- ***bornée*** *lorsqu'elle est à la fois minorée et majoréé, c'est-à-dire lorsqu'il existe deux réels m et M tels que, pour tout entier n, $m \leqslant u_n \leqslant M$.*

Ex : Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \sin(n) + n$.
Alors, pour tout entier n, comme $\sin(n) \geqslant -1$, $u_n = \sin(n) + n \geqslant -1 + n \geqslant -1 + 0 = -1$.
Ainsi, cette suite (u_n) est minorée par $m = -1$.

De plus, pour tout entier n, $u_n = \sin(n) + n \geqslant -1 + n$, ce qui montre que la suite (u_n) n'est pas majorée, et donc n'est pas bornée non plus.

Remarque : Tout nombre inférieur à m est aussi un minorant.
En effet, pour tout entier n on a aussi par exemple, n, $u_n \geqslant -10 \geqslant -210 \geqslant \dots$

Ex : • (u_n) définie pour $n \geq 1$ par $u_n = 3\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) + 2$, alors (u_n) est bornée : $\forall n \geq 1\,,\ -1 \leq u_n \leq 5$.

• (v_n) définie par $v_n = \dfrac{3}{2+n}$ est bornée, car, $\forall n \geq 0\,,\ 0 \leq v_n \leq \dfrac{3}{2}$

Théorème *Toute suite monotone et bornée est convergente :*

- *Toute suite croissante et majorée est convergente.*
- *Toute suite décroissante et minorée est convergente.*

Remarque : Ce théorème permet de montrer qu'une suite converge, mais ne fournit aucun moyen pour déterminer cette limite.

Exercice 20 Soit la suite u définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 1}$

1. Montrer que (u_n) est décroissante.
2. Montrer que la suite (u_n) est minorée.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

c) Point fixe

Théorème Point fixe
Soit une suite (u_n) définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si la suite (u_n) converge vers un réel l, alors, la limite l vérifie la relation $f(l) = l$.
l s'appelle un point fixe pour la fonction f.

Exercice 21 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$.

1. Montrer que cette suite est croissante.
2. Montrer que pour tout entier n, $0 \leq u_n \leq 3$. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. Déterminer la limite l de la suite (u_n).

Exercice 22 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{2}x$, et la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$, puis pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Appliquer le théorème du point fixe à la suite (u_n).
2. Calculer u_0, u_1 et u_2 et conjecturer l'expression de u_n en fonction de n.
   Démontrer cette conjecture. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Quelle est sa limite ?

Exercice 23 Soit la suite u définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier n, par $\quad u_{n+1} = 4 - \dfrac{3}{u_n}$.

1. a) Dans un repère orthonormal (unité graphique 4cm), tracer la droite Δ d'équation $y = x$ et la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par l'expression $\quad f(x) = 4 - \dfrac{3}{x}$.
   b) Placer sur l'axe des abscisses, et sans effectuer aucun calcul, les termes u_0, u_1, u_2 et u_3.
   c) Quelle conjecture peut-on faire sur la suite u.
2. a) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\;2 \leq u_n \leq 3$.
   b) Démontrer que la suite u est croissante, et en déduire qu'elle converge.
   c) Déterminer alors la limite de la suite u.

Exercice 24 On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = xe^{-x}$ ainsi que la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. a) Dresser le tableau de variations de f et tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ de f.
   b) Construire sur le graphique précédent les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnées nulles et d'abscisses repsectives u_0, u_1 et u_2.
   c) Conjecturer le sens de variation de la suite et sa limite.
2. a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier n, on a $u_n > 0$.
   b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   c) Montrer que la suite (u_n) converge vers une limite l. Déterminer l.
3. On considère la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

   Écrire un algorithme/programme qui permet de calculer S_n pour n quelconque donné.
   Calculer S_{100}.

Exercice 25 Soit (S_n) et (T_n) les deux suites définies, pour tout entier naturel n, par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3^n} \qquad et \qquad T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{n}{3^n}$$

1. a. Pour tout entier n, exprimer S_n en fonction de n.
   b. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$
2. a. Montrer que la suite (T_n) est croissante.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $T_{n+1} = \dfrac{S_n + T_n}{3}$.
   c. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $T_n \leqslant 1$.
   d. En déduire que la suite (T_n) converge vers un réel l. Déterminer l.

5) Suites arithmétiques et géométriques

Propriété *Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Alors pour tout entier n, $u_n = u_0 + nr$ et*

- *si $r > 0$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$*
- *si $r < 0$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$*

Exercice 26 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{3 + 2u_n}$.

Pour tout entier n, on pose $v_n = \dfrac{3}{u_n}$.

1. Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 27

1. Soit a un réel strictement positif.
   Démontrer par récurrence que pour tout entier n, $\quad (1+a)^n \geqslant 1+na$.
2. Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme $v_0 > 0$ et de raison $q > 1$.
   Montrer que $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Théorème *Soit q un réel, alors*

- *Si $-1 < q < 1$, alors la suite (q^n) converge vers 0 :* $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- *Si $q > 1$, alors la suite (q^n) diverge vers $+\infty$:* $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
- *Si $q \leqslant -1$, alors la suite (q^n) n'a pas de limite*
- *Si $q = 1$, alors la suite (q^n) est constante, $q^n = 1$ pour tout entier n, et donc aussi,* $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.

Démonstration: Soit $q > 1$, alors $a = q-1 > 0$, et on a démontré à l'exercice 20 que, pour tout entier n, $q^n = (1+a)^n \geqslant 1+na$.

Or, comme $a > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+na = +\infty$, et alors, d'après le corolaire du théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$. $\square$

Exercice 28

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + 6$ et la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 8$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
2. En déduire l'expression de v_n, puis de u_n en fonction de n.
3. Déterminer les limites des suites (v_n) et (u_n).

Exercice 29

Soit la suite u définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier n, $\; u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 1}{u_n + 3}$.

1$^{\text{ère}}$ **méthode** a) vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5 - \dfrac{16}{u_n + 3}$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1; 2]$.

c) Etablir la relation $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{(u_n - 1)^2}{u_n + 3}$, et en déduire le sens de variation de u.

d) Démontrer que u converge et déterminer sa limite l.

2$^{\text{ème}}$ **méthode** On considère la suite v définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\quad v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

a) Prouver que v est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{4}$.

b) Exprimer pour tout n, v_n puis u_n en fontion de n.

c) En déduire la convergence de u et sa limite.