

**Exercice 1** Soit  $(u_n)$  une suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = n^2 + n - 1$ .

1. Donner  $u_0, u_1$  et  $u_2$ .
2. Exprimer en fonction de  $n$  : a)  $u_{n-1}$       b)  $u_{n+1}$       c)  $u_{n+1} - u_n$
3. La suite  $(u_n)$  est-elle arithmétique ?
4. Quel est le sens de variation de  $(u_n)$  ?

**Exercice 2** Préciser si les suites suivantes  $(u_n)$  sont arithmétiques, géométriques, ou ni l'un ni l'autre.

- a. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = n^2$ .
- b.  $u_0 = 2$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = u_n - 5$ .
- c. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \frac{2n^2 + 5n + 3}{n + 1}$ .
- d. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \frac{3^{2n+1}}{2n}$ .
- e.  $u_0 = 3$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n + 4$ , puis  $(v_n)$  définie par  $v_n = u_n - \frac{12}{5}$ .

**Exercice 3** Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  non nul par  $u_n = \frac{n + 1}{n^2 + 1}$ .

1. Déterminer la fonction  $f$  telle que  $u_n = f(n)$ .
2. Etudier le sens de variation de  $f$  et en déduire celui de  $(u_n)$ .
3. Calculer  $u_{10}, u_{100}, u_{10\,000}, u_{10^8}$  et  $u_{10^{16}}$ .  
Que peut-on dire des valeurs de  $u_n$  lorsque  $n$  devient de plus en plus grand ?

**Exercice 4** Même exercice avec les suites  $(u_n)$  définies pour tout entier naturel  $n$  par

- 1)  $u_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$ .    2)  $u_n = 3n^2 + 4n - 5$ .    3)  $u_n = -n^3 + 6n^2 - 9n + 5$     4)  $u_n = \frac{1}{2}e^n$     4)  $u_n = 3e^{-0,5n+1}$

**Exercice 5** Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + 1$ .

Déterminer la fonction  $f$  telle que  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Tracer  $\mathcal{C}_f$  et placer  $u_0, u_1, \dots, u_4$  sur l'axe des abscisses.

**Exercice 6** On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = xe^{-x}$  ainsi que la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ , par  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

- a) Dresser le tableau de variations de  $f$  et tracer la courbe  $\mathcal{C}_f$  de  $f$ .
- b) Construire sur le graphique précédent les points  $A_0, A_1$  et  $A_2$  d'ordonnées nulles et d'abscisses respectives  $u_0, u_1$  et  $u_2$ .
- c) Conjecturer le sens de variation de la suite et sa limite. *Ces résultats seront démontrés plus tard...*

**Exercice 7**  $(u_n)$  est la suite définie par  $u_0 = 3$  et, pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{3u_n}{3 + 2u_n}$ .

Pour tout entier  $n$ , on pose  $v_n = \frac{3}{u_n}$ .

1. Démontrer que  $(v_n)$  est une suite arithmétique.
2. En déduire une expression de  $v_n$ , puis de  $u_n$  en fonction  $n$ .

**Exercice 8**  $(u_n)$  est la suite définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{1}{6}$ .

Pour tout entier  $n$ , on pose  $v_n = 2u_n + 1$ .

- Démontrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique.
- En déduire une expression de  $v_n$ , puis de  $u_n$  en fonction  $n$ .

**Exercice 9** Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 2$  et, pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$ .  
Montrer que, pour tout entier  $n$ ,  $0 \leq u_n \leq 3$ .

**Exercice 10** Montrer que, pour tout  $n \geq 10$ ,  $2^n \geq 100n$ .

**Exercice 11** Soit la suite  $v$  définie par  $v_0 = 2$ , puis pour tout entier  $n$ ,  $v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n}$ .  
Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $\frac{3}{2} \leq v_n \leq 2$ .

**Exercice 12** Somme des premiers entiers, de leurs carrés, de leurs cubes.

- Montrer que, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .
- Montrer que, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .
- Montrer que, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ .

**Exercice 13** Soit  $n$  un entier naturel non nul, et  $S_n$  la somme :  $S_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p(p+1)}$ .

- Ecrire un algorithme permettant de calculer  $S_n$  où  $n$  est un entier choisi par l'utilisateur.
- Montrer par récurrence que pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $S_n = \frac{n}{n+1}$
- a) Vérifier que pour tout entier  $p$  non nul,  $\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$   
b) Retrouver alors le résultat du 1. par une autre méthode.

**Exercice 14** Soit  $a$  un réel strictement positif. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $(1+a)^n \geq 1+na$  (inégalité de Bernoulli).

**Exercice 15** Soit  $u$  la suite définie par  $u_0 = 3$ , et pour tout entier  $n$  par  $u_{n+1} = 2(u_n - 1)$ .  
Calculer les premiers termes de cette suite, et conjecturer une expression de  $u_n$ .  
Démontrer alors cette conjecture.

**Exercice 16** Soit la suite  $u$  définie par  $u_0 = 5$  et, pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 1}$ .  
Démontrer que cette suite est monotone.

**Exercice 17** Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite  $(u_n)$  :

- a)  $u_n = n^3 + \frac{1}{n}$     b)  $u_n = (3n+1)(-7n+5)$     c)  $u_n = \frac{3 - \frac{4}{n}}{\frac{2}{n^2}}$     d)  $u_n = n^3 - n^2 + 3n - 1$
- e)  $u_n = \frac{2n^2 + 1}{-n^2 + 6}$     f)  $u_n = \frac{n^2 + 3n - 5}{n^3 - 6n^2 + 1}$     g)  $u_n = n\sqrt{n} - n$     h)  $u_n = (-2n+3) \frac{n+3}{-n^2 + n + 6}$
- i)  $u_n = \frac{n}{n + \sqrt{n}}$     j)  $u_n = \frac{9 - n^2}{(n+1)(2n+1)}$     k)  $u_n = \frac{1}{3} - \frac{n}{(2n+1)^2}$     l)  $u_n = \frac{2}{3n} - \frac{2n^2 + 3}{3n^2 + n + 1}$

**Exercice 18** D'après BAC

$(u_n)$  est une suite définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ .

- Etudier le sens de variation de  $(u_n)$ .
- Démontrer par récurrence que, pour tout entier  $n$ ,  $u_n = (n + 1)^2$ .
- En déduire que, pour tout entier  $n$ ,  $u_n \geq n^2$ .
- La suite  $(u_n)$  est-elle minorée? majorée? Justifier.
- Donner la limite de  $(u_n)$ .

**Exercice 19** Soit  $(a_n)$  la suite définie par  $a_0 = 1$  et, pour tout entier  $n$ , par  $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + n - 2$ .

- Quelle est la valeur retournée lors de l'appel `fonction(3)` de la fonction python ci-contre?
  - Qu'affiche l'instruction suivante?  
`for i in range(10) : print(fonction(i))`
- Montrer par récurrence que, pour tout entier  $n \geq 7$ , on a  $a_n \geq n - 3$ .
- En déduire la limite de la suite  $(a_n)$ .

```
def fonction(n) :
    a=1
    for p in range(n) :
        a=1/3*a+p-2
    return(a)
```

**Exercice 20** Soit la suite  $u$  définie par  $u_0 = 5$  et  $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 1}$

- Montrer que  $(u_n)$  est décroissante.
- Montrer que la suite  $(u_n)$  est minorée.
- En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.

**Exercice 21** Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$ .

- Montrer que cette suite est croissante.
- Montrer que pour tout entier  $n$ ,  $0 \leq u_n \leq 3$ . En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.
- Déterminer la limite  $l$  de la suite  $(u_n)$ .

**Exercice 22** On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{3}{2}x$ , et la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 3$ , puis pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

- Appliquer le théorème du point fixe à la suite  $(u_n)$ .
- Calculer  $u_0$ ,  $u_1$  et  $u_2$  et conjecturer l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .  
Démontrer cette conjecture. Quelle est la nature de la suite  $(u_n)$ ? Quelle est sa limite?

**Exercice 23** Soit la suite  $u$  définie par  $u_0 = 2$  et, pour tout entier  $n$ , par  $u_{n+1} = 4 - \frac{3}{u_n}$ .

- Dans un repère orthonormal (unité graphique 4cm), tracer la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$  et la courbe  $\mathcal{C}_f$  représentant la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par l'expression  $f(x) = 4 - \frac{3}{x}$ .
  - Placer sur l'axe des abscisses, et sans effectuer aucun calcul, les termes  $u_0$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .
  - Quelle conjecture peut-on faire sur la suite  $u$ .
- Démontrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $2 \leq u_n \leq 3$ .
  - Démontrer que la suite  $u$  est croissante, et en déduire qu'elle converge.
  - Déterminer alors la limite de la suite  $u$ .

**Exercice 24** On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = xe^{-x}$  ainsi que la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ , par  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

- Dresser le tableau de variations de  $f$  et tracer la courbe  $\mathcal{C}_f$  de  $f$ .
  - Construire sur le graphique précédent les points  $A_0$ ,  $A_1$  et  $A_2$  d'ordonnées nulles et d'abscisses respectives  $u_0$ ,  $u_1$  et  $u_2$ .

- c) Conjecturer le sens de variation de la suite et sa limite.
2. a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier  $n$ , on a  $u_n > 0$ .
- b) Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.
- c) Montrer que la suite  $(u_n)$  converge vers une limite  $l$ . Déterminer  $l$ .

3. On considère la somme  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ .

Écrire un algorithme/programme qui permet de calculer  $S_n$  pour  $n$  quelconque donné.  
Calculer  $S_{100}$ .

**Exercice 25** Soit  $(S_n)$  et  $(T_n)$  les deux suites définies, pour tout entier naturel  $n$ , par

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k} = 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^n} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{3^k} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{n}{3^n}$$

1. a. Pour tout entier  $n$ , exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$ .
- b. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$
2. a. Montrer que la suite  $(T_n)$  est croissante.
- b. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $T_{n+1} = \frac{S_n + T_n}{3}$ .
- c. Montrer par récurrence que, pour tout entier  $n \geq 1$ , on a  $T_n \leq 1$ .
- d. En déduire que la suite  $(T_n)$  converge vers un réel  $l$ . Déterminer  $l$ .

**Exercice 26**  $(u_n)$  est la suite définie par  $u_0 = 3$  et, pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{3u_n}{3 + 2u_n}$ .

Pour tout entier  $n$ , on pose  $v_n = \frac{3}{u_n}$ .

1. Démontrer que  $(v_n)$  est une suite arithmétique.
2. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

**Exercice 27**

1. Soit  $a$  un réel strictement positif.  
Démontrer par récurrence que pour tout entier  $n$ ,  $(1 + a)^n \geq 1 + na$ .
2. Soit  $(v_n)$  une suite géométrique de premier terme  $v_0 > 0$  et de raison  $q > 1$ .  
Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .

**Exercice 28** On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 2$  et, pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 6$  et la suite  $(v_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $v_n = u_n - 8$ .

1. Démontrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique.
2. En déduire l'expression de  $v_n$ , puis de  $u_n$  en fonction de  $n$ .
3. Déterminer les limites des suites  $(v_n)$  et  $(u_n)$ .

**Exercice 29** Soit la suite  $u$  définie par  $u_0 = 2$  et, pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3}$ .

**1<sup>ère</sup> méthode** a) vérifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 5 - \frac{16}{u_n + 3}$ .

- b) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in [1; 2]$ .
- c) Etablir la relation  $u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n - 1)^2}{u_n + 3}$ , et en déduire le sens de variation de  $u$ .
- d) Démontrer que  $u$  converge et déterminer sa limite  $l$ .

**2<sup>ème</sup> méthode** On considère la suite  $v$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ .

- a) Prouver que  $v$  est une suite arithmétique de raison  $\frac{1}{4}$ .
- b) Exprimer pour tout  $n$ ,  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- c) En déduire la convergence de  $u$  et sa limite.