

Exercice 1 Déterminer dans chacun des cas la limite de la suite (u_n) :

a) $u_n = \frac{2n+1}{n+325}$ b) $u_n = \frac{2n^2-3n+2}{1-n}$ c) $u_n = \frac{4n^2+1}{n(2n+1)}$ d) $u_n = \frac{3}{2\sqrt{n}+17}$

e) $u_n = \frac{\sqrt{3n+1}}{3+\sqrt{n}}$ f) $u_n = \frac{\sqrt{n^2+n+2}}{\sqrt{n^2-n-1}}$ g) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ h) $u_n = \sqrt{n^2+n} - n$

Exercice 2 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier n , $u_{n+1} = 5u_n + 4$.
Montrer que, pour tout entier n , $u_n > 0$.

Exercice 3 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -3$ et, pour tout entier n , $u_{n+1} = 5 - 4u_n$.
Montrer que, pour tout entier n , $u_n = (-4)^{n+1} + 1$.

Exercice 4 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier n , $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 2}$.
Montrer que, pour tout entier n , $0 < u_n < 1$.

Exercice 5 Montrer que, pour tout entier n , $\sum_{k=1}^n k \times k! = (n+1)! - 1$.

(Rappel : pour tout entier n , $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$).

Exercice 6 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
Calculer u_2 , u_3 et u_4 .
Démontrer que, pour tout entier n , $u_n = 2^n$.

Exercice 7 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier n , $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$.

- Tracer dans un repère la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{4}x + 3$, puis placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3 d'ordonnée nulle et d'abscisse respective u_0, u_1, u_2 et u_3 .
- Montrer que, pour tout entier n , $u_n \leq 4$.
- Montrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.
- En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 8 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier n , $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 3}$.

- Calculer les quatre premiers termes de la suite, et conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) .
Démontrer cette conjecture.
- Montrer que, pour tout entier n , $0 < u_n < 3$.
- En déduire que la suite (u_n) est convergente vers une limite l .
- Déterminer l .

Exercice 9 Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout entier } n, u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2 \end{cases}$.

- Calculer u_1, u_2 et u_3 .
- Montrer que, pour tout $n \geq 4$, $u_n \geq 0$.
- En déduire que, pour tout $n \geq 5$, $u_n \geq n - 3$.

4. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 10 Soit, pour tout entier n , $u_n = \frac{\cos(n)}{n+1}$.

Montrer que pour tout entier n , $-\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$, puis en déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 11 Soit, pour tout entier n , $u_n = \frac{n + (-1)^n}{n^2 + 1}$.

Montrer que pour tout entier n , $\frac{n-1}{n^2+1} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n^2+1}$, puis en déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 12 Soit, pour tout entier n , $u_n = \frac{(-1)^n + n}{(-1)^n + 2}$.

Montrer que pour tout entier n , $u_n \geq \frac{n-1}{3}$, puis en déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 13 Soit la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 12}$.

1. Déterminer les cinq premiers termes de cette suite.
Quel semble être la limite de (u_n) ?
2. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n^2 - 4$ est géométrique.
3. En déduire la limite de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n) .

Exercice 14 Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 \geq -3 \\ u_{n+1} = \sqrt{3 + u_n} \end{cases}$

Quelle valeur de u_0 faut-il prendre pour que la suite (u_n) soit stationnaire ?

Exercice 15 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier n , $3u_{n+1} = u_n + 4$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Démontrer que, pour tout entier n , $u_n \geq 2$.
3. Montrer que (u_n) est une suite croissante.
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
5. On pose, pour tout entier n , $v_n = u_n - 2$.
Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
En déduire l'expression de v_n en fonction de n .
6. Soit $S_n = \sum_{k=0}^n v_k = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ et $T_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.
Déterminer l'expression de S_n , puis de T_n , en fonction de n .
7. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$.

Exercice 16 Soit la suite numérique (u_n) définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.

1. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$.
b. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n < 1$.
c. Etudier le sens de variation de la suite (u_n) .
2. On pose $x_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$
 - a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$
 - b. Déterminer la limite de la suite (x_n) .