Probabilités
Inégalités et grands nombres

Terminale générale
spécialité maths

Exercice 1 On joue au jeu suivant :
- on lance un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et on gagne autant de points que le chiffre obtenu
- on lance ensuite une pièce équilibrée : si on obtient pile on gagne 4 points, si c'est face on perd 8 points

1. Soit X la variable aléatoire égale au nombre total de points obtenus. Calculer $E(X)$. Ce jeu est-il équitable ?
2. On multiplie par 2 tous les points obtenus, ou perdus, dans les deux étapes. Quelle est l'espérance avec cette nouvelle règle ?

Exercice 2 On lance 2 dés équilibrés à 6 faces numérotées de 1 à 6. Le score obtenu est la somme des chiffres sur les 2 dés. On note X la variable aléatoire égale à ce score.
Donner la loi de probabilité de X puis son espérance.

Exercice 3 Calculer les variances dans les exercices précédents.

Exercice 4 On lance 5 dés équilibrés. On note X_k la variable aléatoire égale au résultat du k-ième dé et X la variable aléatoire égale à la somme des résultats obtenus.
Calculer $E(X_k)$ et $V(X_k)$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant 5$, et en déduire $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 5 On lance n fois une pièce équilibrée et on joue au jeu suivant : si on obtient pile au $k^{\text{ème}}$ lancer, on gagne k euros, sinon on ne gagne, ni ne perd, rien.
On note X_k la variable aléatoire correspondant au gain obtenu lors du $k^{\text{ème}}$ tirage et Y_n le total des gains obtenus à l'issue de n lancers.

1. Donner la loi de probabilité de X_k.
   En déduire $E(X_k)$ puis montrer que $V(X_k) = \dfrac{k^2}{4}$.
2. a) Exprimer Y_n en fonction des variables aléatoires X_k.
   b) Déterminer l'espérance de Y_n.
   c) Déterminer le nombre théorique de lancers nécessaires pour que le gain total dépasse en moyenne 280 euros.
   d) Montrer, par récurrence, que pour $n \geqslant 1$ on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
   En déduire $V(Y_n)$.

Exercice 6 Un appareil de mesure permet de réaliser des mesures avec une certaine précision.
Plus précisément, les mesures données par cet appareil peuvent être modélisée par une variable aléatoire X dont l'espérance est la valeur exacte $E(X) = m$ et l'écart type $\sigma(X) = 1$.
On suppose les mesures réalisées avec cet appareil indépendantes les unes des autres.

1. On réalise n mesures. Que peut-on dire de l'espérance de la moyenne de ces mesures ?
2. On sait que la probabilité de l'événement $M_n \in [m - 2\sigma\,;\, m + 2\sigma]$ est d'environ 95%.
   a) Quelle est la précision de la mesure avec 10 mesures ?
   b) Combien faut-il faire de mesures pour que la moyenne de celles-ci donne la valeur exacte avec une précision d'au moins 10^{-2} ?

Exercice 7 Majorer la probabilité $P(X \geqslant 1)$ d'une variable aléatoire X d'espérance $E(X) = 0,5$.

Exercice 8 Un phénomène naturel se produit, au hasard semble-t-il, en moyenne tous les 75 ans.
Majorer la probabilité qu'il se produise dans moins de 300 ans ?

Exercice 9 Une usine produit en moyenne 100 pièces par semaine. Que peut-on dire de la probabilité qu'une semaine elle en produise le double ?

Exercice 10 Montrer que, pour une variable aléatoire positive X et un entier $k > 0$ quelconque, on a $P\left(X \geqslant kE(X)\right) \leqslant \dfrac{1}{k}$.
En déduire la loi : "moins de 10% des salariés gagnent plus de fois le salaire moyen".

Exercice 11 La température moyenne sur une île est de 25 degrés.

a) Majorer la probabilité que la température soit supérieure à 40 degrés un jour donné.

b) Minorer la probabilité que la température soit inférieure à 30 degrés un jour donné.

Exercice 12 Sur mon compte j'ai en moyenne 400 euros. Ma banque ne m'autorise aucun découvert.
Minorer la probabilité que je finisse un mois avec moins de 500 euros sur mon compte.

Exercice 13 Soit X la variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous.

1. Calculer l'espérance et la variance de X.
2. Calculer $P\left(|X - E(X)| \geqslant 2\right)$.
3. Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour $a = 2$ et comparer avec le résultat précédent.

x_i	1	4	10
$P\left(X = x_i\right)$	0,6	0,3	0,1

Exercice 14 Dans un grand magasin, on a relevé que le temps d'attente moyen des clients est de 12 minutes. La probabilité qu'un client attende entre 9 et 15 minutes est de 0,55.
Que peut-on dire de l'écart type du temps d'attente ?

Exercice 15 Une équipe de rugby a marqué 60 essais sur les 20 derniers matchs. On considère que le nombre d'essais marqués à chaque match par l'équipe est une variable aléatoire X.

1. Que vaut l'espérance de X ?
   Majorer la probabilité que l'équipe marque plus de 5 essais au prochain match.
2. On a estimé, statistiquement, que la variance de X est $0,6$.
   a) Majorer la probabilité qu'au cours du prochain match, l'écart entre le nombre d'essais marqués et la moyenne soit supérieur ou égal à 1.
   En déduire une information sur la probabilité que l'équipe marque exactement 3 essais au prochain match.
   b) Minorer la probabilité que l'équipe marque 2, 3 ou 4 essais.

Exercice 16 On lance n fois un dé équilibré et on note le nombre de fois où on obtient 1.
Combien de fois, au minimum, faut-il lancer ce dé pour que la probabilité de s'écarter de la moyenne de plus de 0,1 soit inférieure à 5% ?

Exercice 17 On reprend l'exercice 6 sur les mesures physiques. On rappelle qu'avec l'appareil utilisé, une mesure est modélisée par une variable aléatoire X d'espérance m, qui est aussi la valeur exacte recherchée (et inconnue donc), et d'écart type $\sigma = 1$.

1. On réalise $n = 10$ mesures. Majorer la probabilité que la moyenne des mesures réalisées s'écarte de plus de $0,1$ de la valeur exacte recherchée.
2. Combien de mesures faut-il réaliser pour que la probabilité que l'imprécision sur la mesure soit inférieure à 10^{-2} soit supérieure à 99% ?