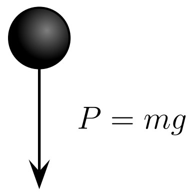
Primitives - Équations différentielles

Terminale générale, spécialité maths

Table des matières

1 Introduction - Contexte physique

Chute d'un corps dans le vide



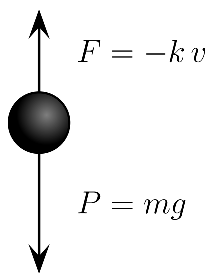
Si $v(t)$ désigne la vitesse du corps à l'instant t, alors l'accélération du corps est la dérivée $v'(t)$.
Dans le vide, le corps est soumis uniquement à la force de pesanteur son poids) et la loi de Newton (principe fondamental de la mécanique) donne :

$$mv'(t) = P = mg$$

soit aussi, $$\boxed{v'(t) = g}$$

C'est une équation dont l'inconnue est la fonction v.

Chute d'un corps dans un liquide visqueux



Pour un modèle plus complet et réaliste, on peut aussi prendre en compte les frottements : ceux-ci peuvent-être modélisés par une force opposée au mouvement du corps, et inversement proportionnelle à sa vitesse.
La loi de Newton s'écrit maintenant :

$$mv'(t) = F + P = -kv(t) + mg$$

ou, $$\boxed{v'(t) = -\frac{k}{m}v(t) + g}$$

L'équation relie cette fois la fonction inconnue v et sa dérivée.

Radioactivité A la toute fin du XIX ème siècle, Marie et Pierre Curie mettent en évidence des éléments radioactifs autres que l'uranium, le polonium et le radium. Des atomes de ces éléments radioactifs se désintègrent en permanence.
Si on désigne par $N(t)$ le nombre d'atomes de radium à l'instant t, alors la quantité d'atomes qui se désintègrent à un instant donné est proportionnelle à la quantité d'atomes encore présente :

$$\boxed{N'(t) = -aN(t)}$$

En résolvant cette équation, on peut donc connaître à chaque instant t le nombre d'atome $N(t)$.

Ceci est par exemple appliqué pour la *datation au carbone 14* de matière organique.
Le carbone 14 est un isotope radioactif du carbone. Connaissant le nombre d'atomes de carbone 14 présents et qui se sont désintégrés, on détermine la durée qu'à pris cette désintégration, c'est-à-dire l'âge de la matière organique.

Cas mathématique général Ces équations sont de la forme $\boxed{y' = ay + b}$,

où y est la fonction recherchée (v ou N dans les exemples précédents).

On appelle ces équations des équations différentielles du premier ordre.

Une équation différentielle du second ordre fait est une équation qui relie la fonction inconnue, sa dérivée et sa dérivée seconde, par exemple

$$y'' + 3y' + y = 4$$

Ces équations du deuxième (et troisième, ...) ordre ne sont pas au programme de ce cours.

2 Exemples et exercices d'introduction

Exercice 1

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=5e^{2x}$.
   Montrer que f est solution de l'équation $y'-2y=0$ d'inconnue y.
2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=f(x)-3x-\dfrac{3}{2}$ est solution de l'équation $y'-2y=6x$.

Exercice 2 **Accélération rectiligne d'un train**
Si on note $x(t)$ la position à l'instant t d'un objet qui se déplace en mouvement rectiligne, alors la vitesse instantannée au même instant t est donnée par $v(t)=x'(t)$ et son accélération par $a(t)=v'(t)$, soit aussi $a(t)=x''(t)$.

Juste après son départ, la vitesse d'un TGV passe de 61,2 km.h^{-1}, à l'instant $t=0$, à 244,8 km.h^{-1} 150 secondes plus tard, avec une accélaration constante.

1. Montrer que l'accélération du TGV durant ces 150 secondes est égale à 0,34 m.s^{-1}.
2. Déterminer la vitesse $v(t)$ du TGV en fonction du temps t.
3. Déterminer la position $x(t)$ du TGV en fonction du temps t.
4. Quelle distance le TGV a-t-il parcourue en 150 secondes ?

Exercice 3 Déterminer des fonctions f telles que :
a) $f'(x)=6x+2$ b) $f'(x)=x^2-3x+5$ b) $f'(x)=2e^{4x}$ c) $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ d) $f'(x)=\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x^2}$

Exercice 4 Soit f une solution de l'équation différentielle (E) : $3y'-6y=1$ qui vérifie de plus $f'(1)=2$.
a) Déterminer $f(1)$.
b) Montrer que $f : x\mapsto e^{2x-2}-\dfrac{1}{6}$ est solution de (E).

3 Définitions

On cherche à résoudre l'équation différentielle, pour a et b deux nombres réels quelconques,

$$(E) : y'=ay+b$$

c'est-à-dire que l'on cherche toutes les fonctions f, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que

$$\text{pour tout réel } x\ ,\quad f'(x)=a\,f(x)+b$$

Définition *L'équation $y'=ay+b$ est une* ***équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.***

4 Équation $y'=g$: primitive d'une fonction

Définition *On dit que F est une primitive de f sur I lorsque F est dérivable sur I et que $F'=f$.*
F est alors solution de l'équation $y'=f$.

Ex : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=5x+2$. Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\dfrac{5}{2}x^2+2x+k$, où k est un nombre réel, sont des primitives de f sur $\mathbb{R}$: pour tout $x\in\mathbb{R}$, $F'(x)=f(x)$.

Exercice 5 Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

a) $f(x)=3x^2+x-6$ b) $f(x)=x^4-4x^3-5x^2+\dfrac{7}{3}x+2$ c) $f(x)=2x-4+\dfrac{3}{x^2}$ d) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

e) $f(x)=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$ e) $f(x)=\dfrac{5x^2}{(x^3+1)^2}$ f) $f(x)=\dfrac{1}{2x+1}$ g) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

Théorème
- *Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.*
- *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.*
  Alors, l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions G définies sur I par $G(x)=F(x)+k$, où k est un réel.

Démonstration : • Si $G(x)=F(x)+k$, alors pour tout $x\in I$, $G'(x)=F'(x)+0=f(x)$, donc pour tout réel k, G est une primitive de f.

• Réciproquement, soit G une primitive de f, et soit la fonction D définie par $D(x)=G(x)-F(x)$. Alors, pour tout $x\in I$, $D'(x)=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$, car G et F sont des primitives de f. Ainsi, $D=G-F$ est constante, soit $D(x)=G(x)-F(x)=k\in\mathbb{R}$, c'est-à-dire, $G(x)=F(x)+k$.

Propriété *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On suppose que f admet une primitive sur I (donc une infinité d'après le théorème précédent).*
Soit $x_0\in I$ et $y_0\in\mathbb{R}$, alors il existe une **unique** *primitive F de f sur I telle que $F(x_0)=y_0$.*

Démonstration : Si G est une primitive sur I de f, alors toutes les primitives F de f sont de la forme $F(x)=G(x)+k$, $k\in\mathbb{R}$.

La condition $F(x_0)=y_0$ s'écrit alors $F(x_0)=G(x_0)+k=y_0$, soit $k=y_0-F(x_0)$.

La constante k est donc définie de manière unique, et il existe donc une unique primitive de f sur I telle que $F(x_0)=y_0$, qui est définie par $F(x)=G(x)+k=G(x)+y_0-F(x_0)$.

Exercice 6 Soit f la fonction définie sur $I=[0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3x^2+6x+4}{(x+1)^2}$.

1. Vérifier que la fonction F définie sur I par $F(x)=\dfrac{3x^2+4x}{x+1}$ est une primitive de f sur I.
2. La fonction G définie sur I par $G(x)=\dfrac{3x^2-x-5}{x+1}$ est-elle une autre primitive de f sur I ?

Exercice 7 Déterminer la primitive F de $f : x\mapsto x^2-4x+2$ telle que $F(1)=0$.

Exercice 8 Déterminer la primitive G de $g : x\mapsto 12x^5-9x^2+6x-3$ telle que $G(0)=4$.

Exercice 9 Déterminer la primitive H de $h : x\mapsto\dfrac{4}{(2x+1)^2}$ telle que $H\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$.

5 Équation $y'=ay$

Définition *L'équation $y'=ay$ s'appelle une équation linéaire* ***homogène*** *à coefficient constant.*

Théorème *Soit a un nombre réel non nul.*
Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E) : y'=ay$ sont les fonctions définies par $f(x)=Ke^{ax}$, où K est un réel quelconque.

Démonstration :

• f est solution de (E) : f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ke^{ax}$ est dérivable, et $f'(x) = aKe^{ax} = af$, c'est-à-dire que f est bien solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

• Il n'y a pas d'autres fonctions solution de (E) Soit g une fonction solution de (E), c'est-à-dire telle que $g' = ag$. On définit la fonction φ sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \dfrac{g(x)}{e^{ax}} = g(x)e^{-ax}$.
φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$\varphi'(x) = g'(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax} = \Big(\underbrace{g'(x) - ag(x)}_{=0}\Big)e^{-ax} = 0$$

Ainsi, φ est constante sur $\mathbb{R}$: il existe un réel K tel que $\varphi(x) = g(x)e^{-ax} = K$, soit donc, $g(x) = Ce^{ax}$, ce qui montre que g est une fonction f.

Exercice 10 Résoudre l'équation $y' = 3y$.

Exercice 11 Résoudre l'équation différentielle $2y' + y = 0$.

Exercice 12 Rechercher la fonction f solution de l'équation différentielle $2y' + 5y = 0$, sachant que $f(0) = 3$.
Dresser le tableau de variation de f et tracer l'allure de sa courbe.

6 Equation $y' = ay + b$

Théorème *Soit a et b deux réels non nuls.*
Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(F) : y' = ay + b$ sont les fonctions f définies par $f(x) = Ke^{ax} - \dfrac{b}{a}$, où K est un réel quelconque.

Démonstration : • f est solution de F : f définie par $f(x) = Ke^{ax} - \dfrac{b}{a}$ est bien dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = aKe^{ax}$.
De plus, $af(x) = aKe^{ax} - b = f' - b$, et donc, on a bien, $f' = af + b$, c'est-à-dire que f est solution de l'equation différentielle F.

• Toutes les solutions de (F) sont de la forme de f : Soit g une solution de (F), c'est-à-dire telle que $g' = ag + b$, et soit alors φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = g(x) + \dfrac{b}{a}$.
Alors φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\varphi'(x) = g'(x) = ag(x) + b = a\varphi(x)$.
Ainsi, φ est une solution de l'équation différentielle $y' = ay$, et donc, $\varphi(x) = Ke^{ax}$, où K est nombre un réel.
On en déduit donc que $g(x) = \varphi(x) - \dfrac{b}{a} = Ke^{ax} - \dfrac{b}{a}$

Remarque : Les solutions f sont la somme d'une solution de $(E_1) : y' = ay$, soit $f_1(x) = Ke^{ax}$ avec $K \in \mathbb{R}$, et d'une solution g *particulière* de (E).
La solution g la plus simple que l'on peut chercher est une solution constante : $g(x) = C \in \mathbb{R}$, dans quel cas, $g'(x) = 0$, et donc $(E) : g' = ag + b \iff 0 = aC + b \iff g(x) = C = -\dfrac{b}{a}$
La solution générale de (E) est alors $f = f_1 + g = Ke^{ax} - \frac{b}{a}$.

Exercice 13 (E) est l'équation différentielle $2y' + y = 1$.

a) Résoudre (E).

b) Déterminer la fonction f solution de (E) telle que $f(-1) = 2$.

c) Tracer la courbe représentant f dans un repère orthonormal.

Exercice 14 Résoudre les équations différentielles :

a) $\begin{cases} y' = 2y + 3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4y' = 2y - 3 \\ y(5) = -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3y' + 4y - 6 = 0 \\ y(-1) = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3u' = u + 6 \\ u(0) = 5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 5p = 2p' - \dfrac{1}{4} \\ p(0) = 1 \end{cases}$

Exercice 15 Soit f la solution de l'équation différentielle (E) : $3y' - 6y = 1$ telle que $f'(1) = 2$.

a) Déterminer $f(1)$.

b) Déterminer la solution f.

7 Équation $y' = ay + g$

Définition *L'équation $y' = ay + g$ est une équation différentielle linéaire du 1er ordre avec second membre.*
Le second membre est g, car $y' - ay = g$.
*L'équation **homogène** associée est $y' = ay$.*

Théorème *Soit (E) : $y' = ay + g$ où g est une fonction continue.*
On note f_p une solution particulière de (E).
Alors, toutes les solutions de (E) s'écrivent sous la forme $f = f_h + f_p$, où f_h est solution de l'équation homogène associée : $f_h = Ke^{ax}$, $K \in \mathbb{R}$.

Exercice 16 Soit (E) l'équation différentielle $2y' = 3y + 6x + 1$.

1. Déterminer les réels a et b tels que $f_p(x) = ax + b$ est solution de (E).
2. Écrire et résoudre l'équation homogène associée à (E).
3. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 17 On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 3y = 3e^{-3x}(-6x + 1)$.
On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-3x}(-9x^2 + 3x + 19)$.

1. Dresser le tableau de variation de g. Préciser les limites.
2. Montrer que la fonction g est solution de (E).
3. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' + 3y = 0$.
4. Résoudre alors (E).
5. Déterminer la fonction solution de (E) qui prend la valeur 1 en $\dfrac{1}{3}$.

Exercice 18 *(D'après Baccalauréat)* On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = e^{2x}$.

1. Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = xe^{2x}$ est une solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' - 2y = 0$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation (E).
4. Déterminer la fonction, solution de (E), qui prend la valeur 1 en 0.

Exercice 19 On cherche à résoudre l'équation différentielle (E) : $y' = 3y - 5y^2$.

1. Démontrer qu'une fonction u définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si, et seulement si, la fonction $v = \dfrac{1}{u}$ est solution de (E') : $y' = -3y + 5$.
2. Résoudre (E').

3. En déduire les solutions de (E).
4. Déterminer la solution de (E) qui prend la valeur 1 en 0.

Exercice 20 Deux cuves A et B sot séparées par une membrane poreuse. On injecte 10 cm^3 d'un gaz dans la cuve A à un instant $t = 0$ alors que la cuve B est laissée vide. Ce gaz se diffuse en permanence entre les deux cuves et une partie est rejetée vers l'extérieur.
On appelle respectivement $A(t)$ et $B(t)$ le volume en cm^3 de ce gaz dans les cuves A et B à l'instant t (exprimé en heure). On a donc $A(0) = 10$ et $B(0) = 0$.
On admet que les fonctions A et B sont définies et dérivables sur $[0; +\infty[$ et vérifient les équations différentielles $A'(t) = -5A(t) + 2B(t)$ et $B'(t) = 2A(t) - 2B(t)$.

On définit de plus sur $[0; +\infty[$ deux fonctions f et g par $f(t) = A(t) + 2B(t)$ et $g(t) = -2A(t) + B(t)$.

a) Calculer $f(0)$ et $g(0)$.

b) Déterminer, pour tout $t \geqslant 0$, $f'(t)$ et $g'(t)$ et en déduire que f et g sont solutions de deux équations différentielles de la forme $y' = ay$.

c) Résoudre ces deux équations et déterminer, pour tout $t \geqslant 0$, $f(t)$ et $g(t)$.
En déduire $A(t)$ et $B(t)$.