Primitives - Équations différentielles - Exercices

Terminale générale, spécialité maths

Exercice 1

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5e^{2x}$.
   Montrer que f est solution de l'équation $y' - 2y = 0$ d'inconnue y.
2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - 3x - \dfrac{3}{2}$ est solution de l'équation $y' - 2y = 6x$.

Exercice 2 Accélération rectiligne d'un train

Si on note $x(t)$ la position à l'instant t d'un objet qui se déplace en mouvement rectiligne, alors la vitesse instantannée au même instant t est donnée par $v(t) = x'(t)$ et son accélération par $a(t) = v'(t)$, soit aussi $a(t) = x''(t)$.

Juste après son départ, la vitesse d'un TGV passe de 61,2 km.h^{-1}, à l'instant $t = 0$, à 244,8 km.h^{-1} 150 secondes plus tard, avec une accélaration constante.

1. Montrer que l'accélération du TGV durant ces 150 secondes est égale à 0,34 m.s^{-1}.
2. Déterminer la vitesse $v(t)$ du TGV en fonction du temps t.
3. Déterminer la position $x(t)$ du TGV en fonction du temps t.
4. Quelle distance le TGV a-t-il parcourue en 150 secondes ?

Exercice 3 Déterminer des fonctions f telles que :

a) $f'(x) = 6x + 2$ b) $f'(x) = x^2 - 3x + 5$ b) $f'(x) = 2e^{4x}$ c) $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ d) $f'(x) = \dfrac{5}{x} + \dfrac{2}{x^2}$

Exercice 4 Soit f une solution de l'équation différentielle $(E) : 3y' - 6y = 1$ qui vérifie de plus $f'(1) = 2$.

a) Déterminer $f(1)$.

b) Montrer que $f : x \mapsto e^{2x-2} - \dfrac{1}{6}$ est solution de (E).

Exercice 5 Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 3x^2 + x - 6$ b) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 5x^2 + \dfrac{7}{3}x + 2$ c) $f(x) = 2x - 4 + \dfrac{3}{x^2}$ d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$ e) $f(x) = \dfrac{5x^2}{(x^3+1)^2}$ f) $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$ g) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

Exercice 6 Soit f la fonction définie sur $I = [0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x^2 + 6x + 4}{(x+1)^2}$.

1. Vérifier que la fonction F définie sur I par $F(x) = \dfrac{3x^2 + 4x}{x+1}$ est une primitive de f sur I.
2. La fonction G définie sur I par $G(x) = \dfrac{3x^2 - x - 5}{x+1}$ est-elle une autre primitive de f sur I ?

Exercice 7 Déterminer la primitive F de $f : x \mapsto x^2 - 4x + 2$ telle que $F(1) = 0$.

Exercice 8 Déterminer la primitive G de $g : x \mapsto 12x^5 - 9x^2 + 6x - 3$ telle que $G(0) = 4$.

Exercice 9 Déterminer la primitive H de $h : x \mapsto \dfrac{4}{(2x+1)^2}$ telle que $H\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2$.

Exercice 10 Résoudre l'équation $y' = 3y$.

Exercice 11 Résoudre l'équation différentielle $2y' + y = 0$.

Exercice 12 Rechercher la fonction f solution de l'équation différentielle $2y' + 5y = 0$, sachant que $f(0) = 3$. Dresser le tableau de variation de f et tracer l'allure de sa courbe.

Exercice 13 (E) est l'équation différentielle $2y' + y = 1$.

a) Résoudre (E).

b) Déterminer la fonction f solution de (E) telle que $f(-1) = 2$.

c) Tracer la courbe représentant f dans un repère orthonormal.

Exercice 14 Résoudre les équations différentielles :

a) $\left\{\begin{array}{l} y' = 2y + 3 \\ y(0) = 1 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{l} 4y' = 2y - 3 \\ y(5) = -1 \end{array}\right.$ c) $\left\{\begin{array}{l} 3y' + 4y - 6 = 0 \\ y(-1) = 0 \end{array}\right.$ d) $\left\{\begin{array}{l} 3u' = u + 6 \\ u(0) = 5 \end{array}\right.$ e) $\left\{\begin{array}{l} 5p = 2p' - \dfrac{1}{4} \\ p(0) = 1 \end{array}\right.$

Exercice 15 Soit f la solution de l'équation différentielle (E) : $3y' - 6y = 1$ telle que $f'(1) = 2$.

a) Déterminer $f(1)$.

b) Déterminer la solution f.

Exercice 16 Soit (E) l'équation différentielle $2y' = 3y + 6x + 1$.

1. Déterminer les réels a et b tels que $f_p(x) = ax + b$ est solution de (E).
2. Écrire et résoudre l'équation homogène associée à (E).
3. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 17 On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 3y = 3e^{-3x}(-6x + 1)$.
On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-3x}(-9x^2 + 3x + 19)$.

1. Dresser le tableau de variation de g. Préciser les limites.
2. Montrer que la fonction g est solution de (E).
3. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' + 3y = 0$.
4. Résoudre alors (E).
5. Déterminer la fonction solution de (E) qui prend la valeur 1 en $\dfrac{1}{3}$.

Exercice 18 *(D'après Baccalauréat)* On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = e^{2x}$.

1. Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = xe^{2x}$ est une solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' - 2y = 0$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation (E).
4. Déterminer la fonction, solution de (E), qui prend la valeur 1 en 0.

Exercice 19 On cherche à résoudre l'équation différentielle (E) : $y' = 3y - 5y^2$.

1. Démontrer qu'une fonction u définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si, et seulement si, la fonction $v = \dfrac{1}{u}$ est solution de (E') : $y' = -3y + 5$.
2. Résoudre (E').
3. En déduire les solutions de (E).
4. Déterminer la solution de (E) qui prend la valeur 1 en 0.

Exercice 20 Deux cuves A et B sot séparées par une membrane poreuse. On injecte 10 cm^3 d'un gaz dans la cuve A à un instant $t = 0$ alors que la cuve B est laissée vide. Ce gaz se diffuse en permanence entre les deux cuves et une partie est rejetée vers l'extérieur.
On appelle respectivement $A(t)$ et $B(t)$ le volume en cm^3 de ce gaz dans les cuves A et B à l'instant t (exprimé en heure). On a donc $A(0) = 10$ et $B(0) = 0$.
On admet que les fonctions A et B sont définies et dérivables sur $[0; +\infty[$ et vérifient les équations différentielles $A'(t) = -5A(t) + 2B(t)$ et $B'(t) = 2A(t) - 2B(t)$.

On définit de plus sur $[0; +\infty[$ deux fonctions f et g par $f(t) = A(t) + 2B(t)$ et $g(t) = -2A(t) + B(t)$.

a) Calculer $f(0)$ et $g(0)$.

b) Déterminer, pour tout $t \geqslant 0$, $f'(t)$ et $g'(t)$ et en déduire que f et g sont solutions de deux équations différentielles de la forme $y' = ay$.

c) Résoudre ces deux équations et déterminer, pour tout $t \geqslant 0$, $f(t)$ et $g(t)$.
En déduire $A(t)$ et $B(t)$.